Г. ВАЛЬТНЕР

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСК IV

ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

Г · Т · Т · И

MATHEMATISCHE QUELLENBÜCHER

IV

INFINITESIMALRECHNUNG

von
DR. HEINRICH WIELEITNER

VERLAG OTTO SALLE, BERLIN 1928

51(09и)
В44
Г. ВИЛЕЙТНЕР
Правда 1955
51
В44

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

СОСТАВЛЕННАЯ
ПО ПЕРВОИСТОЧНИКАМ

ВЫПУСК ЧЕТВЕРТЫЙ

ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

Перевод А. П. ЮШКЕВИЧА.

31984
РСФСР—НКП
Библиотека
Педагогического
института
им. Герцена
№ 49
БИБЛИОТЕКА
Павлодарского
педагогического
института

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

51(09)
В44
II-10-5-1

Читатель! Сообщите отзыв об этой книге (ваши замечания о ее недостатках и желательных изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Ильинка, проезд Владимирова, 4, Государственному технико-теоретическому издательству (в секцию организационно-массовой работы).

448580

Павлова ... устри-
... институт
Библиотека

Редакционная работа по этой книге проведена *А. П. Юшкевичем*. Издание оформлено *Н. И. Москвичевой*. Корректуру держал *С. Ф. Морошкин*. Наблюдал за выпуском *Е. М. Богданов*. Рукопись сдана в производство 29/II 1932 г. Листы подписаны к печати 20/X 1932 г. Книга вышла в свет в ноябре 1932 г. в количестве 5000 экз. на бумаге формата 82 × 110¼₃₂ печатных знаков в листе 43000, в книге 8¹/₄ листов. Заказ № 835. ГТТИ № 243. Уполномоченный Главлита Б 39573.

1-я типография Огиза РСФСР „Образцовая". Москва, Валовая, 28.

Предисловие

Когда я приступил к работе над этим выпуском, мне сразу стало ясно, что я не мог бы выполнить стоящую передо мной задачу, если бы ограничился теми размерами, которые имеют три предшествующих хрестоматии. Томик оказался вдвое большим по размерам, чем другие, и все же я должен сказать, что то, что я здесь предлагаю, представляет собою лишь как бы афористические заметки по истории исчисления бесконечно-малых. Если сравнить исчисление бесконечно-малых с аналитической геометрией, то легко заметить, что и то и другая уходят своими корнями в древность и что как Декарт и Ферма в области аналитической геометрии, так и Ньютон и Лейбниц, отцы современного исчисления бесконечно-малых, были продолжателями работы греков. При этом проследить историю возникновения аналитической геометрии очень просто и легко. Наоборот, работа творцов исчисления бесконечно-малых была не только большей по объему и более сложной (недаром с этим вопросом оказался связанным неокончившийся еще и по сию пору спор о приоритете), но помимо этого они имели многочисленных проложивших им пути предшественников в начале XVII в. Наконец, исчисление бесконечно-малых (по крайней мере, интегральное исчисление) было, по существу, настолько развито уже в древности, что современные, работавшие в XIX в. и возобновившие античную строгость, исследователи, и прежде всего Карл Вейерштрасс, даже в частностях своего способа выражаться примыкают (вероятно, сами этого отчетливо не сознавая) непосредственно к Эвклиду и Архимеду.

Моя книжка начинает поэтому с греков, у которых наряду со строгим методом доказательства мы встречаем уже и эвристический метод. Затем я перехожу к возродившим древнюю математику ученым, которые, не будучи знакомы с эвристическим методом Архимеда и желая подвинуть вперед науку, отказались сами от строгой логичности древних доказательств, но которые (включая Ньютона и Лейбница) сознавали всегда, что все может быть, хотя бы и с большим трудом, доказано методом древних.

Книга заканчивается одним примером из Эйлера, ясно демонстрирующим укоренившуюся к тому времени беззаботность по части логики Это, впрочем, не могло никогда принести большого вреда, поскольку имели дело только с непрерывными и повсюду диференцируемыми функциями. Это следует иметь в виду при чтении моей книжки Я вынужден предоставить читателю перевод на вполне современный язык рассуждений старых авторов, а также моих, указывающих лишь на общее направление пояснительных замечаний. Сам я сохранил знак dx даже в тех случаях, когда теперь писали бы Δx, только потому, что в противном случае мне пришлось бы вдаваться еще в большие подробности. Однако я обращаю внимание на то, что dx обозначает всегда лишь отличную от нуля и произвольно малую величину.

Читатель заметит, что везде, где это только было возможно и нужно, я пользовался первыми изданиями оригиналов. Перевод сделан, по возможности, дословным. Коллега Буллемер вновь сверил цитаты с древних языков. В этом томике все отдельные буквенные обозначения и целые формулы набраны курсивом, даже если это и не было так в оригинале. Греческие буквы я заменил соответствующими буквами латинского алфавита. Круглые скобки в первых главах принадлежат мне; в дальнейших же параграфах, где авторы сами уже употребляют круглые скобки, я заключал свои замечания в квадратные скобки.

.За помощь в моей работе по составлению всех четырех томиков я считаю своим долгом выразить благодарность: И. Тропфке (Tropfke, Берлин), читавшему корректуру, и В. Лорей (W. Lorey), оказавшему мне помощь при установлении ряда биографических дат. Специально в связи с этим томиком я обязан благодарностью Д. Манке (Mahnke, Марбург на Л.) за добрые советы по поводу глав о Лейбнице и И. Е. Гофману (Hoffmann, Мюнхен) за его добросовестную проверку всего текста, благодаря которой в книгу были внесены некоторые исправления.

Мюнхен, ноябрь 1926.

Г. Вилейтнер.

Аксиома измерения (так называемая аксиома Архимеда)

Из „Archimedis Opera omnia...“, iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. I, Lipsiae MDCCCCX (греч. и лат). В частности, из сочинения, называемого „De sphaera et cylindro“, кн. 1.

> Стр. 8. Требования (постулаты). Я принимаю следующее:...
> 5. Далее, что из неравных линий и неравных площадей и неравных тел большее превосходит меньшее на такую величину, которая, будучи прибавляема к самой себе, может стать больше, чем любая заданная величина из тех, которые сравнимы между собой (а значит, и с нею).

Пояснительные замечания. Прежде всего здесь речь идет о сравнимых между собой величинах, т. е. о величинах одного измерения, например отрезках или поверхностях или объемах. Пусть a и b представляют собой, например, два отрезка, и пусть будет $a > b$. Если m представляет собой какой-либо сколь угодно большой[1]) отрезок, то согласно вышеприведенному постулату существуют такие целые числа α, что

$$\alpha(a - b) > m.$$

В левой части этого неравенства вместо $a - b$ мог бы стоять какой угодно определенный отрезок c, так что мы имели бы:

$$\alpha c > m.$$

Форма, которую этот постулат имеет у Архимеда, обязана своим происхождением только способу его применения. И без дальнейших объяснений ясно, что без этого постулата невозможно какое бы то ни было „измерение“.

Мы вскоре ближе познакомимся с применением этого постулата в древней геометрии. В новейшее время этот старый постулат вновь приобрел особенное значение благодаря основанной Д. Гильбертом „аксиоматике“. Этот постулат еще ранее получил наименование „аксиомы Архимеда“, которое сохранил Гильберт[2]). Аксиома Архимеда оказалась в высшей степени важной в качестве одной из „аксиом непрерывности“. Более подробно входить в обсуждение этого вопроса здесь невозможно.

---

[1]) Я обращаю внимание на то, что ни у Архимеда, ни у Эвклида нет указания на это обстоятельство, хотя оно и соответствует существу дела. Подробнее об этом говорится в пояснительных замечаниях к следующей главе.

[2]) „Grundlagen der Geometrie“, 1. Aufl., Leipzig 1900. Есть русский перевод. Краткое изложение имеется в книжке К. Фладта (Fladt) „Euklid“

Однако название „аксиома Архимеда“ с исторической точки зрения неверно. Сам Архимед, приводящий это требование в нескольких местах в своих сочинениях, говорит во введении к „Квадратуре параболы“, что и предшествовавшие ему геометры уже использовали это „вспомогательное предложение“ (лемму)[1]. Нет сомнения в том, что среди этих геометров был Эвдокс, ибо Архимед совершенно определенно приписывает ему некоторые встречающиеся у Эвклида доказательства, в которых применяется эта лемма. Возможно даже, что Эвдокс первый сознательно выставил эту аксиому. Ознакомимся с той позицией, которую занял по отношению к этой аксиоме Эвклид.

Из „Euclidis Elementa“. Edidit... J. L. Heiberg. Vol. II, Lipsiae MDCCCLXXXIV (греч. и лат.).

Книга V. Определения.

Стр. 3..

4. Говорят, что величины находятся в отношении друг к другу, если одна из них может в результате ее повторения стать больше другой.

Пояснительные замечания. Как легко видеть, это определение в скрытом виде содержит аксиому Архимеда; действительно, в нем предполагается, как сама по себе очевидная истина, что одна величина может стать больше другой в результате повторения ее. Такие величины могут находиться в некотором отношении друг к другу. При этом, очевидно, Эвклид подобно Архимеду, также имеет в виду „однородные величины“, но вместе с тем он высказывает нечто большее. Во-первых, Эвклид стремится при помощи своего определения дать возможность находиться в „отношении“ также и таким величинам, которые не имеют общей меры (несоизмеримы)[2]. Учение об отношениях этих величин, составляющее содержание V книги, было создано Эвдоксом, между тем как до того, т. е. до открытия „иррациональностей“, рассматривались только отношения между целыми числами. Во-вторых, Эвклид хочет лишить права находиться в отношении „бесконечно-малые“ и „бесконечно-большие“ образы, как, например, введенные уже древними философами (Демокрит) последние частицы (атомы, неделимые) отрезка или же всю бесконечную прямую. Что Эвклид применял это определение в соответствии с тем смыслом, которым обладает аксиома Архимеда,

[1]) „Opera“ II, стр. 264, строки 13—14.

[2]) Они, разумеется, содержатся также и в данной Архимедом формулировке постулата.

мы видим из одной основоположной теоремы, с которой он начинает X книгу, трактующую об иррациональных величинах

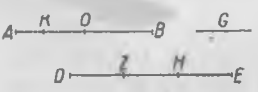
Из „Euclidis Elementa". Edidit.. J. L Heiberg. Vol. III, Lipsiae MDCCCLXXXVI, кн. X.

Стр. 4.

Если даны две неравные величины, и от большей отнять больше половины и от остатка снова отнять больше половины и если так продолжать достаточно долго (буквально: и если так будет происходить постоянно), то (наконец) останется величина, меньшая данной меньшей величины.

Пусть будут даны две неравные величины, а именно AB и G, из которых большей пусть будет AB (фиг. 1). Я утверждаю, что, если от AB отнять больше половины и от остатка (снова) отнять больше половины и если так будет происходить постоянно, то (наконец) останется величина, меньшая величины G.

В результате повторения G может стать больше AB [1]) Повторим его, и пусть DE будет некоторое кратное G, большее AB. Разделим DE на равные G (отрезки) DZ, ZH, HE и отнимем от AB больше, чем половину, а именно BO, затем от AO больше, чем половину, именно OK, и будем поступать так до тех пор, пока AB не окажется разделенным на столько же частей, что и DE.



Фиг. 1

Таким образом пусть число отрезков AK, KO, OB будет равно числу отрезков DZ, ZH, HE. Так как DE больше AB и так как от DE отнято меньше половины, именно EH, а от AB отнято больше половины, именно BO, то остаток HD больше остатка OA. И так как HD больше OA, и от HD отнята половина, именно HZ [2]), а от OA больше половины, именно OK, то остаток DZ больше остатка AK. Но DZ равно G; следовательно, и G больше AK или AK меньше G.

Следовательно, от величины AB остается такая величина AK, которая меньше, чем меньшая из данных величин, именно G, что и требовалось доказать. Подобным же образом можно было бы провести доказательство, если бы отнимались только половины.

---

[1]) Это положение заключает в себе применение аксиомы Архимеда.

[2]) Здесь для полной общности недостает указания, что указанный процесс продолжается, вообще, до тех пор, покамест не дойдем до отрезка, который, подобно DH, делится пополам. Эвклид просто ограничивается случаем отрезка, разделенного на три части.

Пояснительные замечания. Обращаясь прежде всего к содержанию этой теоремы, заметим следующее. Пусть обе рассматриваемые величины будут a и b, и пусть будет $a > b$; если мы будем производить деление пополам так, как это намечено в конце доказательства, то теорема будет гласить, что, если только $b > 0$, то, как бы мало ни было b [1]), всегда существует такое целое число n, что

$$\frac{a}{2^n} < b. \tag{1a}$$

Общую формулировку этой теоремы можно передать следующим образом.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ представляет собой последовательность дробей самих по себе произвольных, но таких, что $\alpha_i < \frac{1}{2}$ при $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$. Тогда существует такое определенное число ν, что

$$a \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu < b. \tag{1b}$$

Если неравенство (1a) справедливо, то (1b) справедливо a fortiori, и для одних и тех же величин a и b будет $\nu \leqslant n$.

Как мы видели, теорема Эвклида является простым следствием аксиомы Архимеда. Но она часто удобнее для применения и употребляется Эвклидом еще в X, 2 для установления случая несоизмеримости величин при помощи операции, посредством которой находят общую наибольшую меру. Пример ее геометрического применения мы приведем в ближайшем номере.

Архимед тоже довольно часто применял теорему в таком виде и, повидимому, он считал ее равнозначащей с „аксиомой измерения“. См. в связи с этим „Сочинения Архимеда“, изданные с современными обозначениями и с предисловием сэра Томаса Л. Хизса (Heath). [Нем. перев. Ф. Клима (Kliem), Берлин 1914, стр. 38.] См. также примечание к X, 1 Эвклида в „The Thirteen Books of Euclid's Elements“. Translated from the Text of Heiberg, with Introduction and Commentary, by Sir Thomas L. Heath. Second Edition. Vol. III, Cambridge 1926, стр. 15/16.

II

Отношение площадей двух кругов

Из „Euclidis Elementa“. Edidit... I. L. Heiberg. Vol. VI, Lipsiae MDCCCLXXXV, кн. XII, 2.

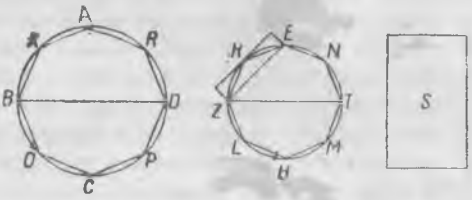
---

[1]) См. примечание на стр. 7.

Стр. 140 Круги относятся между собой, как квадраты, построенные на диаметрах.

Пусть будут даны круги *ABCD* и *EZHT* (фиг. 2), и (пусть) их диаметрами будут *BD* и *ZT*. Я утверждаю, что так же, как круг *ABCD* относится к кругу *EZHT*, так и (142) квадрат, (построенный) на *BD*, относится к квадрату на *ZT*.

Если не верно, что круг *ABCD* относится к (кругу) *EZHT*, как квадрат на *BD* к квадрату на *ZT*, то так же, как (квадрат) на *BD* относится к (квадрату) на *ZT*, круг *ABCD* будет относиться или к чему-либо меньшему, чем площадь круга *EZHT*, или к чему-либо большему. Допустим сперва, что к чему-либо меньшему, а именно *S*. Впишем в круг *EZHT* квадрат *EZHT*. Вписанный квадрат больше половины круга *EZHT*, ибо, если мы проведем в точках *E*, *Z*, *H*, *T* касательные к кругу (прямые), то половина описанного вокруг круга квадрата равна квадрату *EZHT*, а круг менее описанного квадрата. Отсюда следует, что вписанный квадрат *EZHT* больше половины круга *EZHT*. Разделим теперь пополам дуги *EZ*, *ZH*, *HT*, *TE* в точках *K*, *L*, *M*, *N* и проведем *EK*, *KZ*, *ZL*, *LH*, *HM*, *MT*, *TN*, *NE*. Тогда каждый из треугольников *EKZ*, *ZLH*, *HMT*, *TNE* также будет больше половины соответствующего ему сегмента круга. Действительно, если мы проведем через точки *K*, *L*, *M*, *N* касательные к кругу и построим параллелограммы (прямоугольники) на прямых (отрезках) *EZ*, *ZH*, *HT*, *TE*, то каждый (144) из треугольников *EKZ*, *ZLH*, *HMT*, *TNE* будет равен половине соответствующего параллелограмма. Но соответствующий ему сегмент меньше параллелограмма. Следовательно, каждый из треугольников *EKZ*, *ZLH*, *HMT*, *TNE* больше половины соответствующего ему сегмента круга. Если мы разделим теперь оставшиеся дуги и проведем прямые (хорды) и если мы будем так поступать постоянно, то останутся некоторые круговые сегменты, меньшие, чем тот избыток, на который круг *EZHT* превосходит площадь *S*. Действительно, в первой теореме X книги было показано, что, если даны две неравных величины и если от большей отнять больше половины и от остатка (снова) больше половины и так поступать постоянно, то (наконец) останется



Фиг. 2.

такая величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин. Оставим теперь остаток, и пусть сегменты на *EK*, *KZ*, *ZL*, *LH*, *HM*, *MT*, *TN*, *NE* будут меньше избытка, на который круг *EZHT* превосходит площадь *S*.

В таком случае оставшийся многоугольник *EKZLHMTN* больше площади *S*. Впишем теперь также и в круг *ABCD* подобный многоугольнику *EKZLHMTN* многоугольник *AXBOCPDR*. Тогда многоугольник *AXBOCPDR* относится к многоугольнику *EKZLHMTN*, как квадрат на *BD* к квадрату на *ZT*. Но так же, как квадрат на *BD* относится к квадрату на *ZT*, так и круг *ABCD* относится к площади *S*; и, следовательно, так же, как круг *ABCD* относится к площади *S*, так и многоугольник (146) *AXBOCPDR* относится к многоугольнику *EKZLHMTN*. Поэтому после перемены (местами внутренних членов) — так же, как круг *ABCD* относится к (находящемуся) в нем многоугольнику, так и площадь *S* относится к многоугольнику *EKZLHMTN*. Но круг *ABCD* больше (находящегося) в нем многоугольника, и, следовательно, площадь *S* также больше многоугольника *EKZLHMTN*. Но (она) также и меньше его, что невозможно. Следовательно, круг *ABCD* не может относиться к площади меньшей, чем круг *EZHT*, так же, как квадрат на *BD* относится к квадрату на *ZT*. Подобным же образом мы могли бы доказать, что круг *EZHT* не может относиться к площади меньшей, чем круг *ABCD*, так же, как квадрат на *ZT* относится к квадрату на *BD*.

Я утверждаю теперь, что круг *ABCD* не может относиться и к площади большей, чем круг *EZHT*, так же, как квадрат на *BD* относится к квадрату на *ZT*.

Пусть, если это возможно, он именно так относится к большей (площади) *S*. Тогда, обратно, площадь *S* относится к кругу *ABCD*, как квадрат на *ZT* к квадрату на *BD*. Но так же, как площадь *S* относится к кругу *ABCD*, так и круг *EZHT* относится к некоторой площади, которая меньше круга *ABCD*. Таким образом так же, как квадрат на *ZT* относится к квадрату на *BD*, так и круг *EZHT* относится к некоторой площади, меньшей, чем круг *ABCD*. Но, как было доказано, это невозможно. Следовательно, круг *ABCD* не может относиться к площади большей, чем круг *EZHT*, так же, как квадрат на *BD* относится к квадрату на *ZT*. Но было доказано, что (не может иметь места) и (отношение) к меньшей (площади). Следовательно, круг *ABCD* относится к кругу *EZHT*, как квадрат на *BD* к квадрату на *ZT*.

Следовательно, круги относятся, как квадраты на диаметрах, что и требовалось доказать.

Далее следует доказательство одной использованной выше вспомогательной теоремы. Мы его, как излишнее, опускаем; кроме того, оно, по всей вероятности, представляет собой позднейшую вставку.

Пояснительные замечания. На первых порах это доказательство не доставит читателю особенного удовольствия. При помощи нижеследующих рассуждений я надеюсь значительно увеличить это удовольствие, показав, как следует понимать это доказательство и какое основоположное значение имел для греческой математики применяемый в нем метод.

Прежде всего заметим, что Эвдем, один из учеников Аристотеля, сообщает в своей „Истории математики", — от которой, правда, до нас дошли только отдельные извлечения, находящиеся в сохранившемся комментарии к „Физике" Аристотеля позднего платоника Симплиция, — что приведенная теорема была доказана еще Гиппократом Хиосским (около 440 г. до н. эры). Но мы полагаем, что это, во всяком случае, не было то доказательство, которое приведено выше, ибо примененный в последнем метод Архимед определенно приписывает Эвдоксу (правда, в связи не с этой специально теоремой, а с некоторыми другими теоремами XII книги „Начал"). Таким образом весьма вероятно, что творцом этого метода является Эвдокс.

XII книга „Начал" Эвклида посвящена теоремам, которые подобно вышеприведенной и соответствующей ей теореме о шарах, а также теореме об объеме пирамиды, не могут быть доказаны, не прибегая, как мы теперь говорим, к бесконечно-малым. Мы теперь просто говорим, что площадь круга равна πr^2. Такое выражение для площадей вообще не встречается у Эвклида, его не имеется даже для площади прямоугольника. „Вычисление" площадей или объемов философы предоставляли практикам. Во всяком случае мы не знаем геометрических сочинений, появившихся до Эвклида и содержавших какие-либо вычисления. Дело меняется в корне только у Архимеда. Правда, еще древние египтяне знали, что площадь круга можно вычислить, умножив квадрат радиуса на число, несколько большее трех, но лишь Архимед (умер в 212 г. до н. э.) путем остроумных геометрических рассуждений установил для числа π пределы $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$.

Как поступаем мы теперь, чтобы доказать вышеприведенную теорему? В школьном преподавании стараются, большею частью, в силу ряда соображений долго на ней не задерживаться. Обык-

новенно окружность рассматривают как многоугольник с бесконечным количеством сторон и затем применяют к ней все теоремы о правильных подобных многоугольниках: длины двух окружностей относятся, как их диаметры (или радиусы), площади же кругов, как квадраты диаметров (или радиусов). Справедливость последнего предложения для правильных многоугольников доказывается и у Эвклида в теореме XII, 1, непосредственно предшествующей интересующей нас теореме (XII, 2), и даже используется, как мы видели выше, при доказательстве ее. Легко доказать, введя понятие подобного расположения (и не употребляя вписанных многоугольников), что круги суть подобные фигуры. Но этим отнюдь не доказывается, что теоремы о взаимоотношениях подобных многоугольников имеют силу также и для кругов. Как раз переход к криволинейным фигурам и представляет собою punctum saliens доказательства. Многоугольник с миллионом сторон вовсе не представляет собою окружность, а многоугольника с бесконечным количеством сторон не существует.

В настоящее время, когда мы хотим дать строгое доказательство, мы вводим понятие предела и рассматриваем круг как предел, к которому стремятся вписанные и описанные правильные многоугольники, когда число их сторон неограниченно возрастает. Подобное изложение вопроса можно найти, например, у H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, Leipzig 1909, стр. 82 и след. Это — дальнейшее развитие идеи, лежавшей в основе архимедова измерения круга (критический разбор вопроса см у W. Killing u. H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, I т., Leipzig 1910, стр. 334 и след.). Но греки классической эпохи тщательно избегали понятия предела и бесконечного, — вероятно, в результате тех печальных последствий, к которым они привели ранее (софизмы Зенона). Однако совершенно ясно, что Эвдокс (или Эвклид) представляли себе круг как предел вписанных правильных многоугольников. Это непосредственно вытекает из приведенного доказательства. Но так как они не видели никакой возможности построить на основе этой концепции доказательство, удовлетворявшее их по своей логической строгости, то Эвдокс изобрел примененный здесь метод, который позднее был назван методом исчерпывания, причиной чему послужило то обстоятельство, что Григорий из Сент-Винцента (Gregorius a St. Vincentio) употребил для обозначения его в своем „Opus geometricum“ (Антверпен 1647) слово exhaurire (= исчерпывать). Впрочем, то, что дает в вышеприведенном доказательстве Эвклид, лучше назвать доказательством путем исчерпывания.

Путем последовательного вписывания все новых и новых треугольников круг „исчерпывается". Греки никогда из этого не выработали настоящего метода, — и Эвклид и Архимед в каждом отдельном случае, когда им приходилось его употреблять, проводили доказательство путем исчерпывания полностью.

Теперь мы вкратце передадим ход доказательства на современном языке. При этом мы отметим заодно, что, как ни остроумно это доказательство, но ныне оно нас мало удовлетворяет, во-первых, потому, что, как было указано, в нем не выявляется суть дела, во-вторых, потому, что оно косвенное (апагогическое). Все же нельзя не восхищаться гениальностью изобревших этот способ доказательства греков.

Обозначим площади обоих кругов через K и L, площади вписанных в них подобных многоугольников с произвольным количеством сторон — через K' и L', диаметры — через k и l. Эвклид стремится доказать, что

$$K : L = k^2 : l^2, \tag{1}$$

причем ему известно, что

$$K' : L' = k^2 : l^2. \tag{2}$$

Допустим, что (1) неверно и что

$$k^2 : l^2 = K : S, \tag{3}$$

где

$$S < L. \tag{4}$$

Тогда Эвклид увеличивает число сторон многоугольника L' в круге L до тех пор, пока остаток от площади круга не окажется меньше разности $L - S$. Разумеется, эту последнюю можно и должно мыслить сколь угодно малой, но этого Эвклид нигде не высказывает [1]).

То обстоятельство, что мы можем достичь этого в случае вписанных многоугольников, покоится на теореме X, 1, рассмотренной нами в предшествующей главе и служащей фактически основой всех доказательств путем исчерпывания.

---

[1]) Ср. примечание 1 на стр. 7. Для логической правильности доказательства совсем не является необходимым, чтобы разность эту можно было мыслить себе сколь угодно малой, и в последующих доказательствах путем исчерпывания, например в соответствующей теореме об отношении объемов шаров, действительно более не встречается последовательности величин, стремящейся к некоторому пределу. Это, сразу усмотрется, не способствует тому, чтобы такие доказательства оказали для нас более привлекательными.

Мы имеем тогда:

$$L - L' < L - S, \tag{5}$$

и следовательно:

$$L' > S. \tag{6}$$

Если вписать в круг K правильный многоугольник со столь же большим количеством сторон, то будет иметь место равенство (2). Поэтому

$$K' : L' = K : S, \tag{7}$$

или

$$K' \; K = L' : S. \tag{7a}$$

Но так как

$$K' < K, \tag{8}$$

то должно быть также:

$$L' < S. \tag{9}$$

Но это прямо противоречит равенству (6), так что неравенство (4) не может иметь места.

Во второй, более краткой, части доказательства рассматривается, нельзя ли в равенстве (3) принять

$$S > L. \tag{10}$$

Эвклид для этого полагает

$$S : K = L : T. \tag{11}$$

Тогда, так как $S > L$, то и $K > T$[1]), или же

$$T < K, \tag{12}$$

что соответствует равенству (4). Далее, доказательство можно вести точно тем же путем, что и в первой его части, переменив только ролями оба круга. В результате оказывается, что равенство (10) так же невозможно, как и равенство (4), на основании чего должно быть:

$$S = L, \tag{13}$$

а отсюда следует доказываемая теорема.

Если бы Эвклид пожелал доказать прямым путем и вторую часть, то ему пришлось бы воспользоваться описанными многоугольниками. Но сведение вопроса к первому случаю было более коротким. Мы в настоящее время видим недостаток этого, логи-

---

[1]) Доказательство этого предложения содержится в опущенной нами лемме. Оно состоит просто в том, что меняются местами внутренние члены пропорции.

чески безупречного в других отношениях, доказательства в том, что без всяких рассуждений принимается существование значения S, которое должно удовлетворять равенству (3). Мы теперь доказываем существование предела, к которому стремятся вписанные многоугольники. Но вряд ли можно упрекать Эвклида в том, что он не испытывал потребности в этом доказательстве [1]).

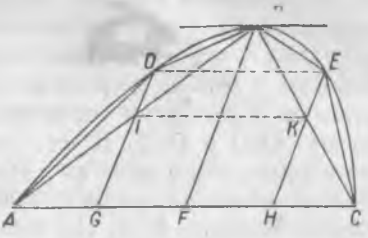
III

Квадратура параболы при помощи бесконечной геометрической прогрессии

Из „Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii", Iterum edidit J. L. Heiberg, Vol. II, Lipsiae MDCCCCXIII. Из сочинения, называемого „Квадратура параболы". Нем. переводы A. Czwalina в „Серии классиков Оствальда", № 203 и F. Klein, с английского издания Th. L. Heath (см. выше, стр. 10). Однако оба перевода сделаны очень вольно.

Предварительное замечание. Сам Архимед не дал никакого названия своему сочинению, ибо оно было написано в виде письма к одному другу. „Квадратура параболы" содержит 24 главы. В первых семнадцати сперва приводится и доказывается ряд теорем о параболе и затем вычисляется площадь (косого) сегмента параболы посредством применения закона рычага и центра тяжести треугольника, — метода, на деле соответствующего современному интегрированию. К этому Архимед присоединяет еще чисто геометрическую квадратуру того же сегмента, основывающуюся на бесконечной прогрессии со знаменателем $^1/_4$. Справедливость результата проверяется при помощи обыкновенного доказательства исчерпыванием. В нижеследующем я передаю содержание глав от XVIII до XXII в современном изложении.

„Пусть в косоугольных координатах, в которых осью y-ов служит касательная в точке B, а осью x-ов диаметр BF (фиг. 3), уравнение параболы имеет вид: $y^2 = mx$, и пусть H представляет собою



Фиг. 3.

[1]) О доказательстве путем исчерпывания см. статью G. Junge, Besondere Methoden der Mathematik, в „Jahresber. Dtsch. Math. Ver.", 35 (1926), стр. 150 и след.

РСФСР—НКП Центральная государственная
3198
Библиотека Павлодарского 2 педагогического института
448580
Павлодар

середину отрезка FC. Тогда, если точка C имеет координаты x, y, то для точки E с координатами $\xi, \frac{1}{2}y$ имеет место равенство:

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = m\xi,$$

и, следовательно:

$$\xi = \frac{y^2}{4m},$$

и

$$HE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{m} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}FB.$$

Далее, так как

$$HK = \frac{1}{2}FB, \text{ то } KE = \frac{1}{4}FB \text{ и } HK = 2KE.$$

Вследствие этого

$$\triangle HCK = 2 \triangle KCE = \triangle BCE,$$

а так как

$$\triangle FCB = 4 \triangle HCK,$$

то

$$\triangle FCB = 4 \triangle BCE,$$

и, наконец, в силу того, что слева от диаметра FB имеют место такие же отношения,

$$\triangle ACB = 4(\triangle ABD + \triangle BCE).$$

При этом все встретившиеся треугольники являются наибольшими из числа тех, которые могут быть вписаны на хордах как на основаниях в сегменты параболы [1]). Но фигуры BCE и ABD находятся в совершенно таком же положении, как и фигура ACB, и с ними можно поступить таким же самым образом. При этом возникнут четыре треугольника, вписанные в четыре оставшиеся сегмента параболы и составляющие вместе $^1/_4$ суммы треугольников ABD и BCE. Далее, так как путем дополнения до параллелограмов легко показать, что каждый вписанный треугольник больше половины соответствующего сегмента параболы [2]), то (согласно Эвклиду, X, 1, см. выше, № I) разность между сегментом параболы ACB и возникающим при последовательном вписывании треугольников вписанным многоугольником может быть сделана

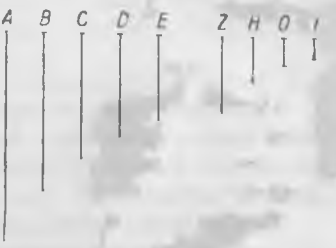
---

[1]) Так как касательная в конце диаметра, например в E, всегда параллельна сопряженной хорде, например BC.

[2]) См. выше № II, стр. 11.

менее любой данной площади. С другой стороны, сумма образуемых таким способом треугольников, как бы далеко ни был проведен процесс их образования, меньше сегмента параболы. Две последние главы я далее передаю дословно.

Стр. 310 (Czwalina, стр 26; Kliem, стр. 368). XXIII. Если даны величины, которые таковы, что каждая из них вчетверо больше следующей, то все эти величины, взятые вместе, если к ним присоединить еще одну треть наименьшей (величины), будут на одну треть больше, чем наибольшая (величина).



Фиг. 4.

Возьмем последовательно сколь угодно много величин A, B, C, D, E (фиг. 4), из которых каждая вчетверо больше последующей[1]). Наибольшей из них пусть будет A, затем пусть Z представляет собою одну треть B, H (также одну треть) величины C, O — треть величины D, I — треть величины E. Так как Z есть третья часть B, а B — четверть A, то B и Z оба вместе составят третью часть A. По тем же самым соображениям также H и C (составят вместе третью часть) B, O и D — третью часть C, I и E — третью часть D, и B, C, D, E, Z, H, O, I все вместе составят третью часть от взятых вместе A, B, C, D. С другой стороны, (сумма) Z, H, O сама составляет третью часть (суммы) B, C, D. Следовательно, остающиеся B, C, D, E, I составляют вместе третью часть оставшейся величины A. Таким образом очевидно, что A, B, C, D, E и I, т. е. одна треть E, взятые вместе, на одну треть больше, чем A.

Пояснительные замечания. Мы предоставим читателю сделать точный перевод рассуждений Архимеда на язык современных обозначений. Мы же передадим только ту идею, которая лежит в основании архимедова доказательства.

Положим

$$S = A + B + C + D + E \quad (A:B = \ldots = D:E = 4:1)$$

Тогда

$$\frac{4}{3}S = \frac{4}{3}A + \frac{4}{3}B + \frac{4}{3}C + \frac{4}{3}D + \frac{4}{3}E,$$

[1]) Прилагаемый чертеж выражает это — из легко понятных соображений — только схематически.

или

$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}A+\left(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{3}D\right)$$

и

$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}A+\left(\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}E\right).$$

Наконец,

$$S+\frac{1}{3}E=\frac{4}{3}A.$$

Нынешний наш метод, состоящий в том, что мы просто умножаем первое равенство на 4 и затем вычитаем первоначальное равенство, хотя и приводит быстрее к цели, но дальше от хода мыслей Архимеда.

Теперь прежде всего следует заметить, что полученный результат уже не являлся новым во времена Архимеда. В 35-й теореме IX книги „Начал" Эвклид доказывает следующую теорему, в формулировке которой я лишь видоизменил в соответствии с вышеизложенным буквы и число элементов.

Если величины E, D, C, B, A, X образуют геометрическую прогрессию, и величина E является наименьшей, то

$$(D-E):E=(X-E):(A+B+C+D+E),$$

или же

$$S=\frac{X-E}{D-E}\cdot E.$$

Это не что иное, как общая формула суммирования геометрической прогрессии. В вышеприведенном случае

$$X=4A,\quad D=4E,$$

и, значит:

$$S=\frac{4A-E}{3}=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E.$$

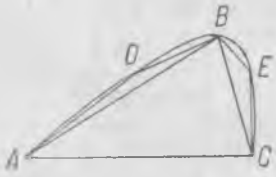
Ни Архимед, ни Эвклид не могли математически выразить того факта, что их расчеты верны для любого числа членов. Но они это говорят, и во всяком случае доказательство протекает так, что можно принять любое конечное число членов.

Все это само по себе не представляет еще ничего особенного. Но, как мы сейчас увидим, Архимед использует полученный им результат, молчаливо допуская, что прогрессия продол-

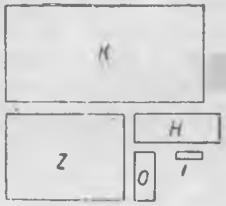
жается до бесконечности, так что $\frac{1}{3}E$ исчезает и S оказывается равным $\frac{4}{3}A$. Прежде всего передадим дословно содержание соответствующей главы.

Стр. 312. XXIV. Всякий ограниченный прямой линией и сечением прямоугольного конуса (г. е. параболой) сегмент на одну треть больше треугольника, имеющего одинаковую с ним высоту и общее основание.

Пусть, действительно, *ADBEC* представляет собою сегмент, ограниченный прямой и сечением прямоугольного конуса (фиг. 5), и пусть треугольник *ABC* имеет с сегментом общее основание и ту же, что и он, высоту. Площадь *K* пусть будет равна четырем третям треугольника *ABC*. Требуется показать, что она равна сегменту *ADBEC*.



Фиг. 5.



Фиг. 5а.

Если она не равна (сегменту), то она либо больше его, либо меньше. Допустим сперва, если это возможно, что сегмент *ADBEC* больше, чем площадь *K*. Я вписываю, как указывалось, треугольники *ADB* и *BEC*, затем в оставшиеся сегменты вписываю другие треугольники с теми же основаниями и одинаковыми высотами, что и у сегментов, и все время продолжаю вписывать в возникающие при этом сегменты [1]) треугольники с теми же основаниями и одинаковыми высотами, что и у сегментов. Тогда (в конце концов) остающиеся сегменты становятся (взятые вместе) меньше разности, на которую сегмент *ADBEC* превосходит площадь *K*. При этом вписанный многоугольник оказался бы больше, чем *K*. Но это невозможно. Действительно, ведь следующие друг за другом площади находятся друг к другу в отношении четырех к одно-

[1]) Здесь в греческом тексте стоит слово δύο (два), что представляет собою очевидную описку. В латинском тексте (стр. 313) это слово тоже выпущено.

му. Прежде всего треугольник ABC вчетверо больше треугольников ADB и BEC, взятых вместе, затем эти треугольники сами вчетверо больше, чем (сумма) вписанных в следующие сегменты (треугольников), и так далее все время, так что очевидно, что все эти площади, вместе взятые, меньше четырех третей наибольшей из них. Но (площадь) K равна четырем третям наибольшей площади, следовательно, сегмент $ADBEC$ не больше площади K.

Допустим теперь, если это возможно, что он меньше. Положим тогда треугольник ABC равным (площади) Z, четверть Z (равной) H, и таким же образом (четверть) H (равной) O и будем поступать так до тех пор, пока последняя (площадь) не окажется меньше разности, на которую площадь K превосходит сегмент, и пусть эта последняя наименьшая (площадь) будет I. Тогда величины Z, H, O, I, взятые вместе и сложенные еще с одной третью I, будут на одну треть больше, чем Z. Но K также на одну треть больше, чем Z. Следовательно, K также равна площадям Z, H, O, I, взятым вместе и еще сложенным с третьей частью I. Далее, так как площадь K превосходит (сумму) площадей Z, H, O, I, взятых вместе, менее, чем на I, а сегмент более, чем на I, то очевидно, что площади Z, H, O, I, взятые вместе больше сегмента. Но это невозможно. Действительно, было доказано, что, если имеется любое количество площадей, из которых каждая вчетверо больше следующей за ней и наибольшая из которых равна вписанному в сегмент треугольнику, то все эти площади, вместе взятые, меньше сегмента. Следовательно, сегмент $ADBEC$ не меньше площади K. Но уже было доказано, что он также не может быть и больше, значит, он равен площади K. А так как площадь K равна четырем третям треугольника ABC, то и сегмент $ADBEC$ также равен четырем третям треугольника ABC.

Пояснительные замечания. Это доказательство представляет собой типичный пример того, что при помощи исчерпывания нельзя найти ничего такого, что не было найдено или о чем бы не догадывались ранее на основании какого-нибудь другого способа. Предварительно Архимед просто заранее формулирует теорему, которую он желает доказать: сегмент параболы равен $\frac{4}{3} \triangle ABC$, и затем он доказывает соответствующим образом, что площадь K, равная $\frac{4}{3} \triangle ABC$, не может быть больше или меньше сегмента параболы. Читатель при же-

лании может сам без труда переложить рассуждения Архимеда на язык алгебраических символов. Мы же здесь коснемся лишь принципиальной стороны дела. Откуда Архимеду известно, что для сегмента площадь окажется равной $\frac{4}{3} \triangle ABC$? Не может быть никакого сомнения в том, что он представлял себе последовательность вписанных треугольников или же заменяющих их в этой главе площадей Z, H, O, I, из которых каждая вчетверо больше последующей, продолжающейся неограниченным образом, так что в конце концов „последний" член геометрической прогрессии может быть положен равным нулю, и сумма ее действительно равна $\frac{4}{3}$ первого (наибольшего) члена. Таким образом фактически Архимед пользовался бесконечной геометрической прогрессией, хотя он на это не намекает ни одним словом. Ведь он доказал, что разность между сегментом параболы и суммой вписанных треугольников может быть сделана менее любой сколь угодно малой величины (в дополнении к гл. XX он говорит только: любой данной площади). Этого вполне достаточно с точки зрения наших современных столь строгих требований. Поэтому особенно замечательно, что древние греки предпочитали взвалить на себя бремя косвенного доказательства, лишь бы избежать слов „предел" или „бесконечное". Однако они, как мы это увидим еще более отчетливо ниже, нисколько не боялись употребления этих понятий в эвристических целях. В противном случае они просто не получили бы никаких результатов.

Из начала этой главы видно, что Архимед еще не употреблял слова „парабола" (так же как „эллипс" и „гипербола"). В прежнее время конические сечения определялись как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей. При этом, естественно, парабола являлась сечением прямоугольного конуса, эллипс — сечением остроугольного конуса и гипербола — тупоугольного. Хотя еще и до Аполлония (около 200 г. до н. эры) было известно, что, например, эллипс можно получить и из тупоугольного конуса, но только Аполлоний первый порвал с традицией и одновременно ввел эти употребительные и до сих пор названия (ср. вып. III, № I).

IV

Опровержение учения о линиях-атомах

Из „Aristotelis quae feruntur..., de lineis insecabilibus,...", edidit Otto Apelt. Lipsiae MDCCCLXXXVIII, стр. 139—157 (греч.). По-лат. в „Aristotelis Opera" ed. Academia Regia Borussiae. Vol. III. „Aristoteles latine interpre-

ibus variis". Berlin 1831, стр. 474 до 476. „De insecabilibus lineis". Julio Mariano Rota interprete. Нем. пер. О. Апельта в „Beitrage zur Geschichte der Griechischen Philosophie", Leipzig 1891, в качестве прилож. к Abh. V: „Die Widersacher der Mathematik im Altertum" (стр. 253—286; в частности, стр. 271—286). Англ. пер. в „The Works of Aristotle", Transl. into Engl. under the Editorship of J. A. Smith W. D. Ross, Part 2; „De lineis insecabilibus", by Harold H. Joachim, Oxford 1908, (IV) + (64) с. in 8°.

Предварительное замечание. Сочинение „О неделимых линиях", наряду с некоторыми другими дошедшее до нас под именем Аристотеля, по всей вероятности, принадлежит одному из его учеников. Различные факты указывают как на его автора на Теофраста, которого сам Аристотель считал крупнейшим из своих последователей и который известен в качестве „отца ботаники". В этом сочинении речь идет об опровержении учения о „линиях-атомах", которое теоретически разрабатывалось в Академии Платона и главным представителем которого был Ксенократ. Согласно названному учению никакой отрезок (и никакое физическое тело), — как этого требовал уже Анаксагор (около 460 г. до н. эры), — не могут быть делимы до бесконечности, а всякая математическая линия (так же как и всякое физическое тело) должна состоять из мельчайших неделимых далее атомов, так называемых „линий-атомов". Эта концепция гармонировала с разработанным, главным образом Демокритом (около 410 г. до н. эры) „атомизмом". Как указывает автор сочинения „О неделимых линиях", это учение „резко противоречит всей математике". Несмотря на это, оно принесло математике пользу. „Неделимые", как называли „линии-атомы" и их обобщения в средние века, послужили, по словам Архимеда (см. ниже. № VII), еще Демокриту для вывода формулы объема пирамиды, а сам Архимед применил их, как мы увидим далее, при открытии строго доказанных им позднее теорем о площадях и объемах. Схоластики, как, например, Альберт Великий, Фома Аквинский, Рожер Бекон, Дунс Скотт, Фома Брадвардин, усовершенствовали теорию неделимых, и первые математики нового времени, как Декарт и Галилей, вновь стали их применять сразу же так, как будто они представляли собой давно знакомые вещи. Ученик Галилея Кавальери привел их применение для квадратур и кубатур в известную систему. Но и те „бесконечно малые" величины, которыми пользовались другие математики начала нового времени, как, например, Паскаль (см. № XIV), также родственны неделимым. Таким образом можно сказать, что неделимые подготовили открытие исчисления бесконечно-малых [1]).

[1]) Несмотря на огромную важность этого сочинения для истории исчисления бесконечно-малых, о нем совершенно не упоминается в боль-

В указанном псевдоаристотелевском сочинении, направленном против этого учения, сперва приводится пять доводов в его пользу. (К сожалению, оригинальным изложением, принадлежащим Ксенократу или кому-либо иному, мы не располагаем.) Первые три довода носят философский характер, четвертый основывается на парадоксах Зенона и отпадает вместе с опровержением этих парадоксов, а пятый базируется на одном недоразумении, относящемся к понятию „соизмеримости". Против этих пяти доводов автор направляет целый фейерверк возражений, поражающих не только изобилием, но и остроумием и меткостью. К сожалению, вследствие плохого состояния дошедших до нас рукописей текст не везде установлен вполне точно. Ниже я даю несколько выдержек из упомянутых возражений.

Стр. 146,16... Таким образом очевидно, что из приведенных (в пользу учения) доводов не следует ни необходимость существования линий-атомов (ἀτόμων γραμμῶν), ни их вероятность. Из последующего это станет еще более ясным...[1])

(I) (147,4). Далее, все линии (отрезки) были бы в таком случае соизмеримыми (σύμμετροι). Ибо все они были бы измеримыми при помощи атомов (-линий), как те, которые соизмеримы (просто) по длине, так и те, которые соизмеримы (только) в квадрате. (Действительно) линии-атомы все соизмеримы по длине, — ведь, они равны, — а значит, они соизмеримы и в квадрате. Но в таком случае каждый квадрат был бы рациональным (ῥητὸν)[2])...

шом труде по истории математики М. Кантора (Cantor). Однако в последнее время на него было обращено внимание ряда исследователей. Известные улучшения в работу Апельта (Apelt) были внесены Евой Закс (Eva Sachs), „Die fünf Platonischen Körper" Berlin, 1917, стр. 133—146; специальную главу линиям-атомам посвятил Ю. Штенцель (J. Stenzel), Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig 1924, стр. 70—83. Для ознакомления с общей постановкой проблемы см. особенно Э. Франка (Erich Frank), Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle a. S. 1923 (в именном указателе) и вышедшую недавно книгу Оскара Бекера (Oskar Becker) „Mathematische Existenz", Halle a. S. 1927 (например стр. 145). Но, насколько мне известно, ни один из немецких авторов не использовал тщательного английского издания Иоахима (Ioachim), которое, однако, вышло еще в 1908 г. и в многочисленных примечаниях содержит как критику текста, так и замечания по существу вопроса. См. также более старую книгу Р. Гейнце (Richard Heinze) „Xenokrates, Darstellung der Lehre und Sammlung der Fragmente", Leipzig 1892, стр. 60—64.

[1]) Греческий текст не разделен на абзацы или как-либо иначе. В издании Иоахима очень хорошо выделены различные пункты.

[2]) Здесь имеется в виду каждый квадратный корень.

(II) (147,12). Далее, раз из трех данных прямых образуется треугольник, то треугольник (можно) составить также из трех линий-атомов. Но в каждом равностороннем (треугольнике) высота (проведенная из вершины) проходит через середину (основания) а следозательно, и через середину атома (линии).

(III). Далее, если из неделимых (ἀμερῶν) (линий) образовать квадрат и провести диагональ и опустить перпендикуляр (из одного из свободных углов на диагональ), то сторона квадрата в квадрате равна квадратам перпендикуляра и половины диагонали (взятым вместе), так что она (сторона квадрата) вовсе не является самым малым (отрезком)...

(IV) (148,6). Далее, присоединение одной линии (к другой) не могло бы увеличить всей линии. Ибо неделимые (линии), взятые в совокупности, не образуют ничего большего.

(V). Далее, раз из двух неделимых (линий) не может быть образована непрерывная (линия), ибо все непрерывное должно допускать многократное деление, а всякая линия, исключая линию-атом (как признается) непрерывна (συνεχής), то не может существовать линий-атомов ... [1]).

(VI) (149,13). Далее (в этом случае) не во всякой линии (имелась бы) точка (στιγμή). А именно (линия)-атом (не могла бы) содержать точки, ибо, если бы она содержала только одну точку, то линия (сама) была бы точкой, а если бы — несколько (точек), то она была бы делима. А если бы в (линии)-атоме не было ни одной точки, то их вообще не имелось бы ни в одной линии, ибо все прочие (линии) (составлены) из атомов-(линий)...

(VII) (150,1). Далее, граница линии была бы линией, а не точкой. Действительно, граница—это есть последнее, т. е. атом-(линия). Но если бы граница была точкой, то и (линия)-атом имела бы своей границей точку, и одна линия была бы больше другой на одну точку... (150,7). Чем, вообще, отличается точка от линии? Линия-атом не обладает, кроме имени, никакими характерными признаками, отличающими ее от точки... (150,17). Но из этих (доводов) ясно, что линия не может также (состоять) из точек. Ибо большая часть доводов подходит почти так же (к точкам, как и к линиям-атомам). (Это соображение развивается далее)...

---

[1]) Аристотель в „Физике", V, 3, определяет непрерывность следующим образом: „Я говорю, что нечто непрерывно (буквально: связано), если границы двух (вещей), которыми они соприкасаются, являются одной и той же и, как говорит уже самое название, связаны".

(VIII) (154,4). Далее, все тогда разлагалось бы и разрешалось на точки, и точка (была бы) частью тела, ибо (согласно теории) тело состоит из плоскостей, плоскости — из (прямых) линий, а линии — из точек...

Пояснительные замечания. Как видно из моего почти дословного перевода, греческий текст в высшей степени лаконичен. Перевод Апельта близок к нему, между тем как перевод Иоахима носит более вольный характер.—Замечание к (I). Разумеется, греку не известны никакие иные иррациональности, кроме иррациональности квадратного корня, которая уничтожается путем возведения в квадрат. Выражаясь современным языком, в этом случае рациональным было бы не только число 3, но и число $\sqrt{3}$, ибо квадрат с площадью 3 имел бы стороны, состоящие из линий-атомов, и, значит, $\sqrt{3}$ должен быть соизмеримым с 3, ибо общей мерой является как раз линия-атом. Различие между рациональным и иррациональным тогда исчезло бы. — (II) и (III) очень изящны и легко понятны.— (IV). Для линий-атомов аксиома Архимеда не имела бы силы,— это отрицание „бесконечно-малого" (см. выше стр. 8). (V). Атомизм находится в принципиальном противоречии с непрерывностью. Это—как раз то, что ныне отделяет так называемых формалистов (Гильберт) от интуиционистов (Броуер). Современная теория непрерывности в конечном счете атомистична, ибо она основывается на теории иррациональных чисел (которым соответствуют точки на отрезке). Интуиционисты, наоборот, являются представителями, так сказать, интуитивной непрерывности; с их точки зрения отрезок не только не состоит из точек, но и не может быть разложен на точки.— (VI—VII). Здесь следует ряд аргументов, показывающих, что линии-атомы не отличаются от точек. — (VIII). Этот отрывок показывает, что Апельт был неправ, полагая, что теория линий-атомов не имеет никакого отношения к атомистике Демокрита. Демокрит как раз применял разложение тела на плоскости (см. ниже стр. 44). Однако систематическая разработка теории впервые была произведена школой Платона [1]).

V

Сумма квадратов чисел

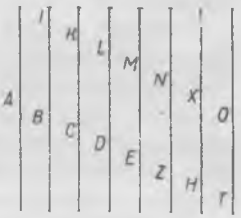
Из „Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii". Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. II, MDCCCCXIII, Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri.

[1]) В дошедших до нас сочинениях Платона не встречается „неделимых линий". Но мы располагаем свидетельством Аристотеля („Метафизика" 1, 9, Ak.-Ausg., 992 a) о том, что сам Платон часто пользовался линиями-атомами.

В частности, из сочин. „De Lineis spiralibus". Нем. пер. A. Czwalina „Über Spiralen" von Archimedes, Leipzig 1922. Akad. Verl.-Ges. (Ostw. Klass., № 201).

Стр. 30. X. Пусть дано произвольно много линий (отрезков), разность между которыми одинакова, пусть эта разность равна наименьшему (отрезку), и пусть даны еще другие линии (отрезки) в том же количестве, что и предыдущие, из которых каждая равна наибольшему. Тогда квадраты, построенные на равных наибольшему (отрезках), вместе с (еще одним) квадратом на наибольшем и прямоугольником на (отрезке), равном всем тем, разность между которыми одинакова, и на наименьшем (отрезке), втрое больше, чем все квадраты, построенные на (отрезках), разность между которыми одинакова. (I) [1]).

Пусть A, B, C, D, E, Z, H, T (фиг. 6) представляют собой произвольно много данных по порядку линий (отрезков), разность между которыми одинакова, и пусть T будет равно этой разности. Присоединим к B отрезок I, равный T, к C — отрезок K, равный H, к D — отрезок L, равный Z, к E — отрезок M, равный E, к Z — отрезок N, равный D, к H — отрезок X, равный C, к T — отрезок O, равный B, тогда все получившиеся (отрезки) будут равны друг другу и (все по отдельности)—наибольшему отрезку. Нужно доказать, что квадраты, построенные на всех (отрезках), а именно на A и на получившихся (в результате дополнения), вместе с (взятым еще раз) квадратом на отрезке A и прямоугольником, построенным на T и на (отрезке), равном всем (отрезкам) A, B, C, D, E, Z, H, T, втрое больше, чем все квадраты на A, B, C, D, E, Z, H, T. (II.)



Фиг. 6.

Квадрат на BI $(B + I)$ равен двум квадратам на I и B и двум прямоугольникам на (отрезках) B и I; (квадрат) на KC равен (32) квадратам на K, C и двум прямоугольникам на K и C; подобным же образом квадраты на других равных A (отрезках) равны квадратам на их частях и двум прямоугольникам, построенным на этих частях. Квадраты же на A, B, C, D, E, Z, H, T вместе с квадратами на I, K, L, M, N, X, O, к которым присоединен еще квадрат на A, вдвое больше, чем (квадраты) на A, B, C, D, E, Z, H, T. (III).

Остается доказать, что взятые в двойном числе прямоуголь-

[1]) Эти цифры соответствуют обозначенным таким же образом разделам пояснительных замечаний.

ники, построенные на частях линий (отрезков), равных каждая *A*, вместе с прямоугольником на *T* и на (отрезке), равном *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T* всем вместе, равны квадратам на *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T*. Так как два прямоугольника, построенные на *B*, *I*, равны двум (прямоугольникам) на *B*, *T*, два (прямоугольника) на *K*, *C* равны прямоугольнику на *T* и учетверенном *C*, ибо *K* вдвое больше *T*, два (прямоугольника) на *D*, *L* равны прямоугольнику на *T* и ушестеренном *D*, ибо *L* втрое больше *T*, и подобным же образом все другие удвоенные прямоугольники, построенные на частях отрезков, равны прямоугольнику, построенному на *T* и (отрезке), представляющем собой все возрастающее по ряду четных чисел кратное ближайшей линии (отрезка), то все это вместе, если присоединить еще прямоугольник, построенный на *T* и (отрезке), равном *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T*, будет равно прямоугольнику на *T* и (отрезке), равном *A* и (34) утроенному *B* и упятеренному *C* и (другим отрезкам), представляющим собой все возрастающие по ряду нечетных чисел кратные ближайшей линии (отрезка). (IV)

Но квадраты на *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T* также равны прямоугольнику, построенному на тех же линиях (отрезках). Действительно, квадрат на *A* равен прямоугольнику на *T* и (отрезке), равном *A*, вместе с (отрезком), равным прочим, из которых каждый равен *A*; действительно, столько раз, сколько *T* измеряет *A* (столько раз измеряет) и *A* все (отрезки), равные ему вместе с (самим) *A*. (V). Следовательно, квадрат на *A* равен прямоугольнику, построенному на *T* и на (отрезке) равном *A*, вместе с удвоенными *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T*, ибо (отрезки), равные *A*, взятые все вместе, исключая *A*, вдвое больше, чем *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T* (VI). Подобным же образом квадрат на *B* равен прямоугольнику, построенному на *T* и на (отрезке), равном *B*, вместе с удвоенными *C*, *D*, *E*, *Z*, *H*, *T*, и точно так же квадрат на *C* равен (прямоугольнику), построенному на *T* и на (отрезке), равном *C*, вместе с удвоенными *D*, *E*, *Z*, *H*, *T*. Таким же образом квадраты на прочих (отрезках) равны прямоугольникам на *T* и на (отрезках), равных им самим (первым отрезкам) и удвоенным остальным. Поэтому очевидно, что квадраты, построенные на всех (отрезках), равны прямоугольнику, построенному на *T* и на (отрезке), равном взятым вместе *A* и утроенному *B* и упятеренному *C* и прочим, представляющим собой все возрастающие по ряду нечетных чисел кратные ближайшего следующего (отрезка). (VII).

Дополнение

На основании сказанного очевидно, что все квадраты, построенные на (отрезках), равных наибольшему (отрезку), взятые вместе, меньше, чем (36) утроенные квадраты, построенные на тех (отрезках), разность между которыми одинакова, ибо они становятся равными утроенным квадратам лишь путем присоединения к ним еще чего то, (и что) они больше, чем утроенная (сумма этих квадратов), если отнять (квадрат), построенный на наибольшем, ибо присоединяемое меньше утроенного квадрата наибольшего (отрезка). (За этим следует еще замечание, что доказанная теорема остается справедливой, если вместо квадратов взяты любые подобные фигуры.) (VIII.)

Пояснительные замечания. Содержание теоремы таково:

(I) Если даны два ряда отрезков

$$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ na = (\text{сумма } s), \tag{1}$$

$$na,\ na,\ na,\ldots,\ na, \tag{2}$$

то

$$n\,(na)^2 + (na)^2 + as = 3\,[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2].$$

(II) Так как Архимед не был в состоянии выразить это в столь общей форме, то он берет два ряда отрезков: ряд

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ Z,\ H,\ T, \tag{1*}$$

представляющий собой убывающую арифметическую прогрессию с разностью T, и

$$A,\ B+I,\ C+K,\ D+L,\ E+M,\ Z+N,\ H+X,\ T+O, \tag{2*}$$

где

$$I = T,\ K = H\,(=2T),\ L = Z\,(=3T)\ldots,\ O = B\,(=7T),$$

так что все отрезки ряда (2*) равны $A\,(=8T)$. Тогда его теорема гласит:

$$[A^2 + (B+I)^2 + \ldots + (T+O)^2 + A^2] + [T(A+B+C+\ldots+T)] = 3(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2),$$

или короче:

$$(n+1)A^2 + T(A+B+C+\ldots+T) = 3\,(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2).$$

(III) Здесь Архимед говорит, что

$$(B+I)^2 = B^2 + I^2 + 2BI,$$

и устанавливает соответствующие равенства для других сумм. Далее, так как $I = T$ и т. д., то

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + T^2 + I^2 + K^2 + L^2 + M^2 + N^2 + X^2 + O^2 + A^2 = 2(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2).$$

(IV) Далее, получается:

$$2BI + 2CK + \ldots + 2TO = 2BT + 4CT + \ldots + 14T^2.$$

Если к этому присоединить еще прямоугольник

$$T(A + B + C + \ldots + T),$$

то получится сумма:

$$T(A + 3B + 5C + \ldots + 15T).$$

(V) Теперь получаем:

$$A^2 = T \cdot 8A = T\ [A + (B + I) + (C + K) + \ldots + (T + O)].$$

(VI) Так как согласно вышесказанному $I = T$, $K = H, \ldots, O = B$, то

$$A^2 = T\,[A + 2(B + C + \ldots + T)].$$

(VII) Подобным же образом:

$$B^2 = T\,[B + 2(C + D + \ldots + T)],$$
$$C^2 = T\,[C + 2(D + E + \ldots + T)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H^2 = T\,(H + 2T),$$
$$T^2 = T \cdot T,$$

и, следовательно:

$$A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2 = T(A + 3B + 5C + \ldots + 15T).$$

Поэтому в силу (IV):

$$2BI + 2CK + \ldots + 2TO + T(A + B + C + \ldots + T) = A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2.$$

Но, согласно (III):

$$A^2 + B^2 + \ldots + T^2 + I^2 + K^2 + \ldots + O^2 + A^2 = 2(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2).$$

Отсюда, наконец, получается теорема:

$$A^2 + (B + I)^2 + \ldots + (T + O)^2 + A^2 + T(A + B + C + \ldots + T) = 3(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2).$$

Гейберг указывает на то, что в доказательстве Архимеда имеются некоторые шероховатости, обязанные своим происхож-

дением позднейшим комментаторским вставкам. Я здесь не буду вдаваться в обсуждение этого вопроса. Записанное в современных обозначениях доказательство Архимеда совсем не так уж трудно для понимания. Но можно представить себе только, что было бы, если все это потребовалось теперь продумать, не пользуясь записью!

(VIII) Дополнение представляет собою важнейшую часть всего рассуждения! В нем говорится следующее:

$$n \cdot A^2 < 3(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots + T^2), \tag{3}$$

что непосредственно явствует из (II), и далее утверждается, что

$$n \cdot A^2 > 3(B^2 + C^2 + D^2 + \ldots + T^2). \tag{4}$$

Последнее неравенство основывается на том, что

$$A^2 + T(A + B + C + \ldots + T) < 3A^2,$$

или же

$$T(A + B + C + \ldots + T) < 2A^2.$$

Это же непосредственно вытекает из (V). Левая часть меньше даже, чем A^2, так что, наверное, меньше $2A^2$.

Если мы в неравенства (3) и (4) подставим обозначения из (1), то они будут гласить:

$$n^3a^2 < 3[a^2 + (2a)^2 + \ldots + (n-1)^2a^2 + n^2a^2], \tag{3*}$$
$$n^3a^2 > 3[a^2 + (2a)^2 + \ldots + (n-1)^2a^2]. \tag{4*}$$

Подставив в соотношение (4*) $n+1$ на место n, мы его преобразуем в неравенство:

$$(n+1)^3a^2 > 3[a^2 + (2a)^2 + \ldots + (n-1)^2a^2 + n^2a^2]. \tag{4**}$$

Неравенства (3*) и (4**) можно объединить в одно:

$$\frac{n^3}{3}a^2 < a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}a^2. \tag{5}$$

Если в последнем неравенстве заставить a все время уменьшаться, а n одновременно неограниченно возрастать, причем так, чтобы an было всегда равно некоторому определенному значению x, и если умножить его еще на a ($= dx$), то из него (коротко выражаясь) получится интеграл:

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}. \tag{6}$$

По существу именно так Архимед и пользуется неравенствами (3) и (4) (см. следующий номер).

(IX) Самую формулу суммы квадратов чисел Архимед не вычислил, но она сразу же получается из (1), если положить там $s = \frac{1}{2} n(n+1)a$. Тогда получится:

$$3[a^2 + (2a)^2 + \ldots + (na)^2] = (n+1)n^2a^2 + \frac{1}{2}n(n+1)a^2 =$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)a^2(2n+1),$$

или же $a^2 + (2a)^2 + \ldots + (na)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2$.

Разумеется, из этой формулы можно было бы получить интеграл (6) непосредственно путем перехода к пределу (см. ниже стр. 42), не применяя употребляемых Архимедом неравенств. Чистая сумма квадратов чисел натурального ряда получается из последнего равенства путем деления на a^2.

VI

Объем сфероида (эллипсоида вращения)

Из „Archimedis Opera omnia...“ Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. I. MDCCCCX, Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri (греч. и лат.). В частности, из сочинения, озаглавленного „De conoidibus et sphaeroidibus“. Нем. перевод A. Czwalina „Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide“ (Ostwalds Klassiker, № 210), Leipzig, Akad. Verlagsges., 1923.

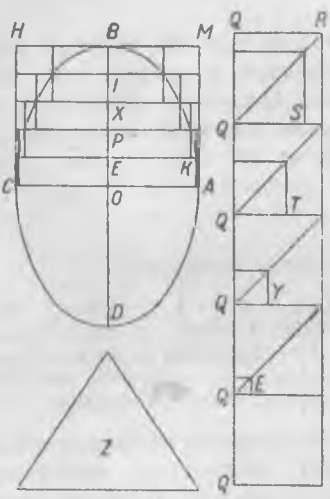
Стр. 392. XXVII. Если пересечь какое-либо сфероидальное тело (σχῆμα, буквально — фигура) плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно к оси, то половина сфероида будет вдвое больше конуса, имеющего то же основание и ту же ось, что и сегмент (сфероида).

Допустим, что сфероидальное тело пересечено плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно к оси. Пересечем его, кроме того, другой плоскостью, проходящей через ось тела, и пусть получившееся сечение (линия) $ABCD$ будет (фиг. 7) сечением остроугольного конуса (т. е. эллипсом), диаметр же его и ось сфероида пусть будет BD, а центр O. При этом неважно, будет ли BD большим или же меньшим из диаметров сечения остроугольного конуса. Пусть линией пересечения с (первой) пересекающей тело плоскостью будет

(394) прямая CA. Эта прямая будет проходить через (точку) O и образует с BD прямой угол, ибо было предположено, что плоскость проходит через центр и образует с осью прямой угол. Требуется доказать, что составляющий половину сфероида сегмент, основанием которого служит круг, построенный на AC как на диаметре, а вершина лежит в точке B, вдвое больше конуса, имеющего то же основание и ось, что и этот сегмент.

Допустим, что нам дан некоторый конус, в котором Z (будет) (т. е. который назовем через Z) вдвое больше конуса, имеющего те же основание и ось, что и сегмент, (именно) OB. — тогда я утверждаю, что половина сфероида равна конусу Z.

Если половина сфероида не равна конусу Z, то примем сперва, что она, если это возможно, больше. Впишем тогда в сегмент, составляющий половину сфероида, тело (на этот раз σχῆμα στερεόν, т. е. твердая фигура), а вокруг сегмента опишем тело, состоящее из цилиндров одной и той же высоты, притом так, чтобы описанное тело отличалось от вписанного меньше, чем на величину, на которую половина сфероида больше конуса Z (I). Так как описанное тело, которое больше половины сфероида, превосходит вписанное тело меньше, чем на разность между сфероидом и конусом Z, то очевидно, что и тело, вписанное в представляющий собой половину сфероида сегмент, будет больше конуса Z (II). Построим теперь цилиндр, основанием которого будет круг, построенный на AC как на диаметре, а осью BO. Так как этот цилиндр втрое больше (396) конуса с теми же основанием и осью, что и сегмент, а конус Z вдвое больше названного конуса, то очевидно, что цилиндр наполовину больше, чем конус Z. Продолжим плоскости всех цилиндров, из которых состоит вписанное тело, до поверхности цилиндра, имеющего те же основание и ось, что и сегмент. При этом весь цилиндр разделится на цилиндры, число которых равно числу цилиндров



Фиг. 7.

описанного тела, а величина равна наибольшему из последних. Далее, возьмем линии (отрезки), у которых (стоят) буквы *Q*, число которых равно числу частей прямой *BO*, а величина каждой равна *BO* (III), и на каждой из них построим по квадрату и от последнего квадрата отнимем гномон, по ширине равный (отрезку) *BI*; этот гномон будет в таком случае равен прямоугольнику, построенному на *BI* и *ID* (IV). От следующего квадрата отнимем гномон, по ширине равный удвоенному (отрезку) *Bi*, — этот гномон будет равен прямоугольнику, построенному на *BX* и *XD*. Далее, от всякого следующего квадрата отнимем по гномону, ширина которого на один отрезок (V) больше, чем ширина непосредственно перед тем отнятого (398) гномона. Каждый гномон будет равен прямоугольнику, построенному на (двух) отрезках *BD*, из которых один равен ширине гномона. При этом квадрат, остающийся от второго квадрата, будет иметь сторону, равную *OE*. Далее, первый цилиндр из (цилиндров, лежащих) в целом цилиндре, имеющий своей осью *OE*, находится в том же отношении к первому цилиндру, (принадлежащему) вписанному телу и имеющему ту же ось, (именно) *OE*, в каком квадрат на *AO* находится к квадрату на *KE* (VI). Из этого следует, что они находятся также в том же отношении, что и прямоугольник, построенный на *BO* и *OD*, к прямоугольнику, построенному на *BE* и *ED* (VII). Таким образом (первый) цилиндр находится в том же отношении ко (второму) цилиндру, что и первый квадрат к отнятому от второго квадрата гномону. Подобным же образом каждый из остальных цилиндров с осью, равной *OE*, находится в том же отношении к (соответствующему) цилиндру вписанного тела, имеющему ту же ось, в каком соответствующим образом расположенный квадрат находится к гномону, отнятому от следующего за ним квадрата. Таким образом мы имеем некоторые величины, (а именно) цилиндры целого цилиндра, а также другие (величины), (и именно) квадраты на *QQ*, число которых равно числу цилиндров и которые попарно находятся в одном и том же отношении. Далее, цилиндры поставлены в соответствие с другими величинами, (именно) с цилиндрами вписанного тела, но последний цилиндр не поставлен в соответствие ни с каким другим (VIII), а также и квадраты (поставлены в соответствие) с другими величинами, (а именно) с отнимаемыми от квадратов гномонами, но последний квадрат не поставлен в соответствие ни с каким другим. Затем все цилиндры (400) целого цилиндра находятся в том же отношении ко всем дру-

гим цилиндрам, что и все квадраты ко всем отнятым от них гномонам (IX). Таким образом цилиндр с теми же основанием и осью, что и сегмент, находится в том же отношении к вписанному телу, что и все квадраты ко всем отнятым от них гномонам. Но квадраты (взятые вместе) больше чем в полтора раза больше, чем все отнятые от них гномоны. Действительно, имеются некоторые линии (отрезки) *QR*, *QS*, *QT*, *QF*, разность между которыми все время одинакова, причем наименьший из них равен этой разности, и имеются еще другие линии (отрезки), у которых (стоят) две (буквы) *QQ*, число которых равно числу первых, а величины все равны наибольшей. Поэтому квадраты, построенные на всех (отрезках), из которых каждый равен наибольшему (взятые все вместе), меньше, чем утроенное кратное всех квадратов, построенных на отрезках, разность между которыми все время одинакова, но больше, чем утроенное кратное всех этих квадратов без наибольшего; это было доказано в сочинении „О спиралях“ (см. предшествующий номер). Но так как все квадраты меньше, чем утроенное кратное других квадратов, отнятых от первых, то очевидно, что они (взятые вместе) больше, чем полуторное кратное остающихся (фигур) и таким образом (взятые вместе), они больше, чем полуторное кратное гномонов (X). Следовательно, и цилиндр с теми же основанием и осью, что и сегмент, больше, чем полуторное кратное вписанного тела. Но это невозможно. Действительно, он представляет собой полуторное кратное конуса *Z*, а ведь вписанное тело, как было доказано, больше, чем конус *Z*. Поэтому половина сфероида не больше конуса *Z* (XI).

(402). Но она и не меньше. Допустим, действительно, что что она, если это возможно, меньше. Тогда мы снова впишем в половину сфероида тело, а вокруг сегмента опишем другое тело, состоящее из цилиндров одной и той же высоты, притом так, чтобы описанное тело отличалось от вписанного меньше, чем на величину, на которую конус *Z* больше, чем половина сфероида, и затем точно так же, как ранее, построим все остальное. Так как вписанное тело меньше сегмента, то очевидно, что и описанное тело меньше конуса *Z*. Затем, первый цилиндр (из цилиндров, лежащих) в целом цилиндре, имеющий своей осью *OE*, снова будет находиться в том же отношении к первому цилиндру (принадлежащему) вписанному телу, имеющему своей осью *OE*, в каком первый квадрат находится к самому себе, а второй цилиндр (из числа находящихся) в целом цилиндре, имеющий своей осью *EP*, бу-

дет находиться в том же отношении ко второму цилиндру, (принадлежащему) вписанному телу, имеющему своей осью EP, в каком второй квадрат находится к отнятому от него гномону. Каждый из остальных цилиндров (находящихся) в целом цилиндре, имеющий своей осью один из (отрезков), равных OE, будет находиться в том же отношении к цилиндру, занимающему подобное же положение во вписанном теле и имеющему ту же ось, в каком расположенный соответствующим ему образом квадрат находится к отнятому от него гномону. Затем все цилиндры целого цилиндра находятся в том же отношении ко всем цилиндрам вписанного тела, в каком все квадраты находятся к (площади), равной первому квадрату, и отнятым от остальных квадратов гномонам (взятым вместе). Далее, все квадраты (взятые вместе) меньше, чем полуторное кратное (площади), равной первому квадрату и гномонам, отнятым от остальных квадратов, так как они (т. е. все квадраты) (взятые вместе) больше, чем утроенное кратное квадратов, построенных на отрезках, разность между которыми одинакова, без наибольшего квадрата (см. предшествующий номер). Следовательно, цилиндр с теми же основанием и осью, что и сегмент, меньше, чем полуторное кратное описанного тела. Но это невозможно. Действительно, он представляет собою полуторное кратное конуса, и (ранее) было доказано, что описанное тело меньше конуса Z. Поэтому половина сфероида не меньше конуса Z. Так как она не меньше, не больше его, то она равна ему.

Пояснительные замечания. Прежде чем перейти к более общему разбору доказательства, следует объяснить некоторые отдельные места, помеченные выше римскими цифрами.

(I) Метод вписывания и описывания составленных из маленьких цилиндров ступенчатых тел так часто применялся Архимедом в предшествующих главах, что он здесь уже не подвергнется подробному рассмотрению. Он описан в главе XIX, в которой также доказывается, что вписанное и описанное тела можно сделать как угодно близкими друг к другу.

(II) Запишем здесь вывод в алгебраической форме.

Пусть

$$\frac{1}{2}\ \text{сфер.} = Z + \varepsilon$$

и

$$\text{опис. тело} = \text{вписс. тело} + \eta\ (\eta < \varepsilon).$$

Далее,

$$\frac{1}{2}\ \text{сфер.} = \text{впис. тело} + \eta' \quad (\eta' < \eta < \varepsilon).$$

Тогда из первого и третьего равенств следует, что

$$\text{впис. тело} > Z \quad (\text{на } \varepsilon - \eta').$$

(III) На чертеже масштабы по необходимости уменьшены (как и для конуса Z). (IV) Гномон равен $BO^2 - IO^2 = (BO - IO)(BO + IO) = BI \cdot ID$. Для Архимеда это попросту следует из II, 5 Эвклида (ср. вып. II № II). (V) Здесь, разумеется, имеются в виду „отрезки" на OB. В греческом тексте здесь употреблено то же слово, что и для обозначения сегмента, равного половине сфероида. (VI) См. у Эвклида теоремы XII, 11 и XII, 2 (выше № II). (VII) Эта теорема о свойствах эллипса имеется у Аполлония, 1, 21 (см. вып. III № III). (VIII) Так как последний вписанный цилиндр равен нулю. (IX) Под словом „все" нужно понимать „сумма всех". Здесь Архимед применяет теорему I цитируемого сочинения, гласящую на нашем языке следующее: если даны четыре последовательности величин $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$; $A_1', A_2', \ldots, A_n'$; $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ и если

$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_n = B_1 : B_2 : B_3 : \ldots : B_n,$$

а также

$$A_i : A_i' = B_i : B_i',$$

или, выражаясь более современно:

$$B_i = \lambda A_i,\ B_i' = \lambda A_i' \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

то

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) : (A_1' + A_2' + \ldots + A_n') = (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) : (B_1' + B_2' + \ldots + B_n').$$

Для нас справедливость этой теоремы ясна сразу, в силу сокращения коэфициента λ. При этом A_i представляют собой здесь (равные все друг другу) цилиндры — части целого цилиндра, A_i' — цилиндры — части вписанного тела, B_i — (равные все друг другу) квадраты, а B_i' — соответствующие гномоны. При этом отсутствие того или иного из A_i' не играет роли, так как тогда отсутствуют и соответствующие B_i'.

(X) Если из

$$m = m$$

вычесть неравенство

$$p > \frac{1}{3} m,$$

то получится:

$$m - p < \frac{2}{3} m$$

или

$$m > \frac{3}{2} (m - p).$$

(XI) Если мы весь цилиндр обозначим временно через Zyl, а вписанное тело — через E, то нам известно, что

$$\text{Zyl} = \frac{3}{2} Z$$

и

$$E > Z.$$

Отсюда следует, что

$$\text{Zyl} < \frac{3}{2} E.$$

Но из принятого выше допущения следовало, что

$$\text{Zyl} > \frac{3}{2} E.$$

Следовательно, это допущение невозможно.

Переходя к некоторым замечаниям общего характера, я прежде всего должен защитить себя от упрека в том, что я выбрал слишком длинный и сложный пример. Дело обстоит как раз наоборот. Дело в том, что я желал привести рассмотрение $\sum x^2$, представляющей больший интерес, чем $\sum x$ (арифметическая прогрессия), ибо $\sum x^2$ встречается уже в элементарной математике при выводе объема пирамиды. К счастью, Архимед не был знаком с понятием „частного случая“ и поэтому он отдельно и очень подробно исследовал случай половины сфероида после того, как он уже вычислил перед тем меньшие (прямые и косые) сегменты сфероида. Я говорю „к счастью“ потому, что вывод для меньших сегментов, естественным образом, много сложнее. Но можно было бы еще спросить, почему я не выбрал вместо сфероида шар. Ответить на это просто, — потому что Архимед в исследовании шара (в сочинении „De sphaera et cylindro“) шел иным путем. Он начинает там с много более трудного вопроса о площади шаровой поверхности, из которой он выводит методом, сходным с современным способом, объем шара. Но ни одному

читателю не доставит затруднения представить себе, что $OA = OB$ (чего у Архимеда нет в качестве „частного случая“) [1]). Эта же самая $\sum x^2$ применяется и при определении площади спирали.

Рассмотренный нами здесь метод Архимеда представляет собой значительное расширение и усиление метода исчерпывания (см. выше № II) и в этой форме, в соединении вписанных и описанных лестницеобразных тел, принадлежит, по всей вероятности, ему самому. Разумеется, и здесь следует повсюду представлять себе, что разность „по возможности“ мала и что само тело представляет собой „предел“ вписанных в него и описанных вокруг него тел.

Далее, я должен еще добавить к вышеприведенному замечанию (I), что при доказательстве возможности сколь угодно тесного сближения вписанных тел Архимед берет весь комплекс вписанных и описанных лестницеобразных цилиндров и складывает их так, как складывают подзорную трубку, пока B совпадет с E. Тогда вся разность сводится к одному первому цилиндру с диаметром CA и высотой OE. Но этот цилиндр путем уменьшения OE может быть сделан, по выражению Архимеда, „меньше любой заданной телесной величины“.

За этим следует громоздкое вычисление, громоздкое потому, что Архимед не знает никакой алгебраической символики и, кроме того, оперирует не равенствами, как мы, а пропорциями. Мы уже раньше не раз видели, что это представляет собой крупнейший формальный недостаток греческой математики. Если мы положим $OA = a$ и $OB = b$ и если $OE = \frac{b}{n} = h$, то можно сказать, что Архимед строит квадраты b^2 и отнимает от них квадраты $[0]$, h^2, $(2h)^2$,..., $(n-1)^2 h^2$, в результате чего и получает гномоны $[b^2]$, $b^2 - h^2$, $b^2 - (2h)^2$,..., $b^2 - (n-1)^2 h^2$.

То обстоятельство, что прямоугольник $BE \cdot ED$ пропорционален квадрату EK (и аналогично — для других), легко получается нами из уравнения эллипса. Если последнее дано в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2),$$

---

[1]) Однако нет сомнения в том, что это было известно Архимеду. Действительно, он сообщает в „Методе“ (см. ниже № VII), что сперва он нашел объем шара (как раз так, как указано в „Методе“) и отсюда перешел к шаровой поверхности.

и если положить временно $OE = x$, то $BE \cdot ED = (b - x)(b + x)$ и $EK = y$. Но

$$\frac{y^2}{b^2 - x^2} = \text{const}.$$

Поэтому

$$\frac{\text{цил., составл. часть цел. цил.}}{\text{цил., составл. часть впис. тела}} = \frac{b^2}{b^2 - (\nu h)^2}.$$

Затем, согласно приведенной теореме I, в числителях и знаменателях дробей образуются суммы. Тогда мы получаем:

$$\frac{\text{весь цилиндр}}{\text{впис. тело}} = \frac{nb^2}{(n-1)\,b^2 - \sum_1^{n-1} (\nu h)^2},$$

где в знаменателях повсюду отсутствует член, соответствующий верхнему последнему члену. Затем доказывается, что в правой части числитель больше, чем $\frac{3}{2}$ знаменателя. Для этого в приведенном выше замечании (X) нужно положить $m = (n-1)\,b^2$ и $n = \sum (\nu h^2)$ и затем применить равенство (3*) пояснительных замечаний к предыдущему номеру, заменив n через $n-1$. Тогда мы получим:

$$(n-1)\,b^2 > \frac{3}{2}\,[(n-1)\,b^2 - \sum (\nu h)^2].$$

Так как числитель nb^2 еще больше, чем $(n-1)\,b^2$, то утверждение является доказанным. Дальнейшее имеется у Архимеда.

Во второй части доказательства в знаменателях имеется на один член больше (т. е. столько же, сколько в числителях), и знаменатель правой части имеет вид:

$$nb^2 - \sum (\nu h)^2.$$

Но согласно равенству (4*) пояснительных замечаний к предыдущему номеру:

$$nb^2 > 3 \sum (\nu h)^2,$$

и путем аналогичного рассуждения, что и выше, доказывается, что

$$nb^2 - \sum (\nu h)^2 > \frac{2}{3}\, nb^2,$$

или

$$nb^2 > \frac{3}{2}\left[nb^2 - \sum (yh)^2\right].$$

Теперь метод Архимеда совершенно понятен. Он представляет собой настоящее интегрирование. Действительно, если отвлечься от греческой формы изложения, то можно сказать, что Архимед суммирует маленькие цилиндры, объемы которых в общем виде равны $y^2\pi h$. Подставляя сюда вышеприведенные значения y и складывая все члены, мы получим, что объем вписанного тела равен:

$$\frac{\pi a^2 h}{b^2}\left[(b^2 - h^2) + (b^2 - (2h)^2) + (b^2 - (3h)^2) + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + (b^2 - (n-1)^2 h^2)\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{b^2}\left[(n-1)\, b^2 - h^2 (1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2)\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{b^2}\left[n^2 (n-1) - \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6}\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{6b^2} n (n-1)(4n+1) = \frac{\pi a^2 b}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right),$$

а описанного тела:

$$\frac{\pi a^2 h}{b^2}\left[b^2 + (b^2 - h^2) + (b^2 - (2h)^2) + \ldots + (b^2 - (n-1)^2 h^2)\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{b^2}\left[nb^2 - h^2 (1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2)\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{b^2}\left[n^3 - \frac{1}{6}(n-1)\, n\, (2n-1)\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2 h^3}{6b^2} n (n+1)(4n-1) = \frac{\pi a^2 b}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(4 - \frac{1}{n}\right).$$

Если в этих равенствах заставить n возрастать до бесконечности, то как выражение для вписанного тела, так и выражение для описанного превратятся в общее значение для половины сфероида $\frac{2a^2 b\pi}{3}$. Считая известным приведенный в пояснительных

замечаниях предыдущего номера интеграл, мы можем просто написать (в совершенно современной форме):

$$\text{половина сфероида} = \pi \int_0^b y^2\,dx = \pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) dx =$$

$$= \pi a^2 \left(b - \frac{b^3}{3b^2}\right) = \frac{2}{3} a^2 b \pi.$$

Я думаю, что уже из этого видно, какими огромными выгодами обладает закрепление раз полученных результатов в виде формул.

VII

Вычисление Архимедом объема шара

Из „Archimedis Opera omnia...“ Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. II. MDCCCCXIII, Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri (греч. и лат.). В частности, из сочинения „Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen; an Erathosthenes“.

Предварительное замечание. „Учение о методе“ [Эфод, (Ephodos)] Архимеда, из которого мы заимствуем нижеследующий отрывок, было в 1906 г. извлечено на свет из одного греческого монастыря в Константинополе Гейбергом, внимание которого на рукопись обратил один немецкий филолог. Его появление вызвало настоящую сенсацию. Здесь, в письме к другу-специалисту, Архимед позволяет непосредственно заглянуть в мастерскую своего творчества. Он излагает здесь механический метод, при помощи которого им был найден ряд замечательных результатов, снабженных позднее строгими косвенными доказательствами, какими они встречаются в его научных трудах. Об этом „Учении о методе“ ранее было кое-что известно только благодаря некоторым указаниям Герона. Когда книга была опубликована[1]), то оказалось, что в ней применяются в чистом виде так называемые „неделимые“, на которых Кавальери в начале XVII в. стремился систематически воздвигнуть исчисление бесконечно-малых (см. ниже № X). Несомненно, что эти неделимые обязаны своим происхождением древнему учению об атомах,

[1]) Греческий оригинал был впервые опубликован Гейбергом в филологическом журнале „Hermes“, т. 42, 1907, стр. 245—300, немецкий перевод с комментариями был дан И. Г. Цейтеном (Zeuthen) в Bibliotheca math., 3-я серия, т. 7, 1906/1907, стр. 321—363. В „Hermes“ приложена также репродукция одной страницы манускрипта, воспроизведенная в „Jahresber. Deutsch. Math. Ver.“, т. 16, 1907, тетрадь 7/8 (текст на стр. 402—404, 462).

достигшему кульминационного пункта у Демокрита (см. выше № 4). Плутарх сообщает, что уже Демокрит разбивал цилиндр и конус секущими параллельными плоскостями и рассматривал их как „составленные из кругов“. Далее, Архимед передает также в „Учении о методе“, что Демокрит нашел таким путем объем конуса, хотя доказана теорема была впервые только Эвдоксом. Таким образом очевидно, что впервые применил математические неделимые Демокрит (indivisibilis = греч. „atomos“ = = неделимый). В своем сочинении Архимед идет по пути Демокрита, представляя себе треугольник „составленным“ из отрезков, параллельных одной стороне, а цилиндр „заполненным“ кругами, параллельными основанию. При этом он не говорит ни того, что сечений должно быть бесконечно много, ни того, что получающиеся таким образом слои должны быть бесконечно тонкими. Берутся попросту „все“ параллели. Но прежде всего обратимся к тексту. Сперва я привожу некоторые из вводных соображений общего порядка, а затем передаю теорему II об объеме шара [1]).

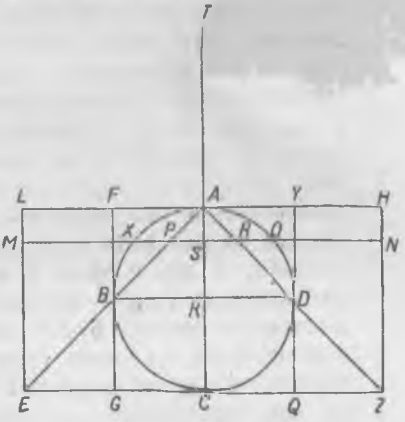
Теоремы из механики, которыми пользуется Архимед, он предпосылает без доказательства. В его собственных дошедших до нас сочинениях приводится только часть из них, но очевидно, что в те времена они были уже хорошо известны.

> Стр. 428, [24] . . . Однако, по моему убеждению, этот метод не менее полезен и для доказательства самих теорем. Действительно, некоторые из теорем, о которых я составил себе предварительно ясное представление при помощи механики, были потом доказаны геометрически, так как (рассмотрение) при помощи одной только этой теории лишено доказательной силы. Но легче провести доказательство тогда, когда уже ранее приобрел таким образом некоторое представление о вопросе, чем заниматься поисками (доказательства) без таких предварительных сведений . . . (430). Я, однако, решил обнародовать этот метод в письменном виде, . . . с другой же стороны, будучи убежденным, что окажу тем самым математике поистине немаловажную услугу. Действительно, я полагаю, что некоторые из ныне живущих или наших потомков найдут при помощи предлагаемого метода и другие теоремы, мной еще не открытые.
>
> . . . . . .
>
> Стр. 438 II . . . Далее, посредством этого метода будет выведено, что каждый шар вчетверо больше конуса, основание

[1]) В теореме I говорится о площади параболы, а в теореме III — об объеме сфероида.

которого равно наибольшему из (кругов) на шаре, а высота равна (отрезку) (проведенному) из центра шара, и что цилиндр, основание которого равно наибольшему из (кругов) на шаре, а высота равна диаметру шара, равен увеличенному в полтора раза шару.

Действительно, пусть будет (дан) шар и большой круг на нем *ABCD* (фиг. 8). Пусть *AC* и *BD* будут два взаимно перпендикулярных диаметра; далее, пусть будет (проведен) на шаре круг на диаметре *BD* перпендикулярно к кругу *ABCD*. Построим на этом перпендикулярном круге конус с вершиной в точке *A*. (Далее) пересечем конус при продолжении его поверхности плоскостью, проходящей через (точку) *C* (параллельно) его основанию. При этом получится круг, перпендикулярный к *AC*, пусть его диаметр (будет) *EZ*. Затем построим на этом круге цилиндр с осью, равной *AC*, — пусть боковые (линии) цилиндра будут *EL* и *ZH*. Продолжим *CA* и отложим равный ему (отрезок) *AT* и будем рассматривать *CT* как коромысло с центром в точке *A*. Проведем параллельно *BD* произвольную линию *MN*, пересекающую окружность *ABCD* в (точках) *X*, *O*, диаметр *AC* в (точке) *S*, прямую *AE* в (точке) *P*, *AZ* в *R*, и проведем через прямую *MN* плоскость, перпендикулярную к *AC*. Эта плоскость пересечет цилиндр по окружности диаметра *MN*, шар *ABCD* — по окружности диаметра *XO*, а конус *AEZ* — по окружности диаметра *PR*.



Фиг. 8.

Так как (прямоугольник) на *CA* и *AS* равен прямоугольнику на *MS* и *SP*, ибо *AC* равно *SM* и *AS* равно *PS*, а (квадрат) на *AX* равен прямоугольнику на *CA* и *AS* и вместе с тем (обоим квадратам) на *XS* и *SP*, то и прямоугольник, построенный на *MS* и *SP*, равен (квадратам) на *XS* и *SP*. И так как *MS* относится к *SP*, как *CA* к *AS*, а *CA* равно *AT*, то, как *TA* относится к *AS*, так *MS* — к *SP*, т. е. (квадрат) на *MS* к (прямоугольнику) на *MS* и *SP*. Но было доказано, что (прямоугольник) на *MS*, *SP* равен (квадратам) на *XS*, *SP*.

Следовательно, квадрат на *MS* относится к (440) квадратам на *XS* и *SP*, как *AT* к *AS*. Но (квадрат) на *MN* относится к квадратам на *XO* и *PR*, как (квадрат) на *MS* к (квадратам) на *XS* и *PS*, и круг диаметра *MN* в цилиндре относится к обоим кругам, а именно к кругу диаметра *PR* в конусе и к кругу диаметра *XO* в шаре, как (квадрат) на *MN* к (квадратам) на *XO* и *PR*. Таким образом круг в цилиндре так относится к обоим кругам в конусе и шаре (вместе), как *TA* к *AS*. Далее, так как круг в цилиндре, остающийся на своем месте, относится к обоим кругам с диаметрами *XO* и *PR*, перемещенными и закрепленными в (точке) *T* так, чтобы *T* была центром тяжести каждого из них, как *TA* к *AS*, то они по отношению к (точке) *A* будут находиться в равновесии. Подобным же образом можно показать, что если в параллелограме *LZ* провести другую прямую (параллельную) *EZ* и через проведенную (прямую) провести плоскость, перпендикулярную к *AC*, то образующийся в цилиндре круг, остающийся на своем месте, будет находиться по отношению к точке *A* в равновесии с двумя другими кругами, образующимися в конусе и шаре, если последние переместить и так закрепить на коромысле в (точке) *T*, чтобы каждый из них имел центр тяжести в (точке) *T*. Но так как цилиндр, а также шар и конус заполнены (συμπληρωθέντος) полученными (таким образом) кругами, то остающийся на своем месте цилиндр будет находиться по отношению к точке *A* в равновесии с обоими (телами), шаром и конусом, если их переместить и так закрепить на коромысле в *T*, чтобы каждый из них имел центр тяжести в *T*. Далее, так как названные тела (στερεά) находятся в равновесии по отношению к точке *A*, если цилиндр остается на месте с центром тяжести в *K*, а шар и (444) конус перемещаются, как было сказано, к центру тяжести *T*, то цилиндр относится к шару и конусу (взятым вместе), как *TA* к *AK*. Но *TA* вдвое больше *AK*; поэтому и цилиндр вдвое больше шара и конуса вместе. Но он втрое больше одного конуса, и, следовательно, три конуса равны двум таким же конусам и двум шарам. Если отнять общие два конуса, то получится, что один конус, осевым треугольником которого является треугольник *AEZ*, равен двум названным шарам. Но так как *EZ* вдвое больше *BD*, то конус с осевым треугольником *AEZ* равен восьми конусам, осевой треугольник которых есть *ABD*. Поэтому восемь названных конусов равны двум шарам. Следовательно, шар, большой круг которого есть *ABCD*, вчетверо больше конуса, вершина которого находится в точке *A* и основанием которого является

круг, построенный на диаметре BD перпендикулярно к AC.

Проведем теперь в параллелограме LZ через точки B и D (прямые) FBG и YDQ, параллельные AC, и представим себе цилиндр, основаниями которого служат круги на диаметрах FY и GQ, а осью которого является AC. Так как цилиндр, осевой параллелограм которого есть FQ, вдвое больше цилиндра, осевой параллелограм которого есть FD, а этот последний, в свою очередь, втрое больше конуса с осевым треугольником ABD, как (это) (известно) из „Начал“, то цилиндр с осевым параллелограмом FQ вшестеро больше конуса с осевым треугольником ABD. Но уж было доказано, что шар (446), большой круг которого есть $ABCD$, вчетверо больше этого конуса. Следовательно, цилиндр в полтора раза больше шара, что и требовалось доказать.

Пояснительные замечания. Попросив читателя самому разобрать в изложении Архимеда все удобопонятные пункты, я изложу алгебраически ход мыслей Архимеда. Он прост и краток. Требуется доказать, что, если переместить центры тяжести обоих тел в T, то момент конуса AEZ, сложенный с моментом шара, равен моменту цилиндра $LEZH$ с центром тяжести в K, причем оба момента вычислены по отношению к точке A как точке опоры.

Если положить

$$AC = 2r = AH = MS \text{ и } AS = x,$$

то для любого сечения MN будет:

$$PS = x,\ OS^2 = AS \cdot SC = x(2r - x),$$

следовательно,

$$PS^2 + OS^2 = 2rx.$$

Но так как

$$MS^2 = 4r^2,$$

то из этого тотчас следует, что

$$MS^2 \cdot AS = (PS^2 + OS^2) \cdot HA,$$

ибо

$$4r^2 \cdot x = 2rx \cdot 2r.$$

Для того чтобы получить желательное равенство моментов, достаточно помножить обе стороны полученного выражения на π. Но самое замечательное, что Архимед образует названные

тела из кругов, лежащих в плоскости MN, или же, как он выражается в главе I, представляет себе, что тела составляются (συνεστηκεν; стр. 436,[24]) из них, когда MN из положения EZ переходит в положение LH. Здесь мы имеем фактически чистое понятие „неделимого“ в противоположность „бесконечно-малому“, применявшемуся Архимедом в других интегрированиях (см. предшествующий номер). Бесконечно-малое в виде полоски площади или слоя тела имеет определенную ширину или толщину, которые при возрастании числа полосок (или слоев) стремятся к нулю. Неделимое же, наоборот, не имеет никакой толщины, оно, по существу своему, обладает одним измерением меньше (в случае поверхности это — линия, в случае тела — поверхность) и порождает исходный образ в результате движения. В таком именно виде „неделимое“ перешло в средневековую схоластику, в которой, правда, оно играло чисто теоретическую роль в спорах о непрерывности [1]). Для математического использования неделимых ничтожное математическое образование средних веков было недостаточно.

До сих пор у Архимеда все обстоит в полном порядке. Но за этим следуют недостаточно строгие рассуждения, согласно которым эти нематериальные неделимые могут в своей совокупности и без движения заменить собой физическое тело. Это, быть может, еще годится до некоторой степени для остающегося в покое цилиндра. Но в случае двух других тел неделимые как бы вырываются и переносятся все по отдельности в точку T. Архимед использовал рычаг для аналогичных целей, но уже без неделимых, только еще один раз, а именно в сочинении о квадратуре параболы. Здесь же совокупность сечений шара и конуса находится в T, уравновешивая там весь цилиндр.

Дальнейшие выкладки тоже не представляют для нас труда. Вытекающее из вышеприведенного равенства моментов соотношение

$$2(\text{шар} + \text{конус}) = \text{цилиндр}$$

даст нам просто уравнение:

$$\text{шар} + \frac{1}{3} 4r^2 \cdot 2r\pi = \frac{1}{2} 4r^2 \cdot 2r\pi,$$

или

$$\text{шар} = \frac{4}{3} r^3\pi.$$

---

[1]) См. в связи с этим статью C. R. Wallner, Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis. Bibliotheca mathematica, 3-я серия, 4 т., 1903, стр. 28—47.

Так называемый „принцип Кавальери“, согласно которому два тела равны, если они на любой высоте имеют одинаковые по площади сечения, разумеется, непосредственно вытекает из идей Архимеда. Но у Архимеда не имеется ни одного примера, из которого это было бы непосредственно ясно [1]). Мы в настоящее время всегда устраиваем (в основном согласно методу Кавальери), чтобы условие Кавальери было соблюдено, в частности, мы поступаем так и в случае шара, отнимая от цилиндра *FGQY* удвоенный конус *FKYGKQ* и доказывая, что остающееся тело равно шару (см. № VIII). Принцип Кавальери обладает тем преимуществом, что позволяет избежать ошибок, которые очень легко могут возникнуть в результате пренебрежения толщиной неделимых.

Сочинение Архимеда вскоре было утеряно. Но его идеи и отдельные результаты сохранились. В эпоху Ренессанса у художников появляются тела с правильно определенными объемами из „Учения о методе“. А в начале XVII столетия математики наряду с „бесконечно малыми величинами“ воспользовались идеей неделимых для того, чтобы подготовить новый и более пышный, чем во времена Архимеда, расцвет математики.

VIII

Вычисление объема шара в XVII столетии

Из „De centro gravitat s solidorum libri tres“. Lucae Valerii Mathematicae, & Civilis Philosophiae in Gymnasio Romano Professoris, Romae, Typis Bartholomaei Bonfadini, MDCIIII. 2-е, изд., Bononiae, Ex Typographia Haeredum de Duccijs MDCLXI.

Liber secundus, стр. 17 и след. [2]) (2 е изд., стр. 83 и след.)

Теорема XII

Половина шара вдвое больше конуса или же равна двум третям цилиндра, имеющего одинаковое с ним основание и ту же высоту.

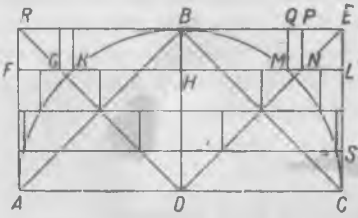
Пусть будет дано полушарие (фиг. 9), ось которого есть *BD* и основанием которого служит круг диаметра *AC*. Допустим, что на этом круге построены цилиндр *AE* и конус *ABC*,

---

[1]) Некоторым представлением об этом, повидимому, обладал Герон (см. его „Учение об измерении“, „Vermessungslehre“, ed. H. Schöne, Leipzig 1903, нем. пер., стр. 95).

[2]) В 1-м издании каждая книга имеет свою собственную пагинацию, во 2-м издании одна общая пагинация.

общей осью, а потому и одинаковой высотой которых пусть будет BD. Я утверждаю, что полушарие ABC вдвое больше конуса ABC и равно двум третям цилиндра AE. Построим на круге RE как на основании конус EDR с вершиной D. Разделим ось BD сперва пополам, а затем будем продолжать делить пополам ее отдельные части и через точки деления проведем плоскости, параллельные AC, основанию полушария, плоскости, пересекающие полушарие, конус и цилиндр. Тем самым цилиндр AE окажется разбитым на цилиндры одинаковой высоты. Представим себе теперь, что на сечениях конуса (EDR) и полушария, представляющих собой круги, центры которых расположены на оси BD, построены цилиндры, которые заключены между каждой парой соседних параллельных плоскостей и оси которых поэтому все равны между собой и лежат на BD. Таким образом в конус EDR окажется вписанным некоторое тело (figura), а вокруг полушария ABC описанным тело, причем, каждое из этих тел состоит из цилиндров одинаковой высоты. Пусть оба эти тела будут таковы (это может быть достигнуто продолжающимся делением пополам частей BD), что описанное тело превосходит полушарие на такую величину, а вписанное меньше конуса на такую (подобную) величину, что каждая из этих величин может быть меньше любой заданной величины, как бы мала она ни была. В соответствии с этими положениями очевидно, что в остаточное тело, получающееся, если от цилиндра отнять полушарие, вписано тело, состоящее из остатков, получающихся из цилиндров, на которые был разделен цилиндр AE, если от них отнять цилиндры, описанные вокруг полушария. Само это тело меньше остаточного тела на разность, которая меньше какой бы то ни было заданной величины. Действительно, эта разность равна той величине, на которую описанное вокруг полушария тело превосходит полушарие, до того остатка включительно, который остается от самого нижнего цилиндра AS, если от него отнять соответствующую часть полушария. Допустим, что FE представляет собой высший из всех упомянутых цилиндров, составляющих части цилиндра AE, и что ось его будет BH. Далее, пусть будет прямая $FGKHMNL$ общим сечением плоскости, проходящей через точку H па-



Фиг. 9.

раллельно основанию полушария, и плоскости, проходящей через ось *BD*. Так как удвоенный прямоугольник *DHB* [1]) вместе с двумя квадратами *DH* и *BH* равен квадрату *BD*, а удвоенный прямоугольник *DHB* вместе с квадратом *BH* равен прямоугольнику на *BD* и *DH*, взятых вместе, и на *BH*, то прямоугольник на *BD* и *DH*, взятых вместе, (tamquam una) и на *BH* вместе с (una cum) квадратом *DH* равен квадрату *BD*, т. е. квадрату *FH*. Но квадрат *KH* равен прямоугольнику, построенному на *BD* и *DH*, взятых вместе, и на *BH*. Таким образом разность, получающаяся, если от квадрата *FH* отнять квадрат *KH*, равна остающемуся квадрату *DH*, т. е квадрату *GH*. И если все это взять четыре раза, то видно, что разность, получающаяся, если отнять квадрат *FL* от квадрата *MK*, представляет собой весь квадрат *GN*, а значит, и остаток, получающийся, если от круга *FL* отнять круг *MK*, равен кругу *GN*. Но поэтому же в силу равенства высот цилиндр *GP* равен разности цилиндров *FE* и *QK*. Подобным же образом можно показать, что каждый отдельный остаток, получающийся, если от одного из цилиндров, на которые разбит весь цилиндр *AE*, отнять один из цилиндров, описанных вокруг полушария, равен цилиндру, вписанному в конус *EDR* и расположенному между теми же (параллельными) плоскостями. Следовательно, состоящее из названных остатков цилиндров целое тело, описанное вокруг остаточного тела цилиндра *AE*, получающегося, если от него отнять полушарие, равно телу, вписанному в конус *EDR*. Но каждое из этих тел отличается — одно от конуса *EDR*, а другое от остатка цилиндра *AE*, получающегося по отнятии от него полушария, — менее, чем на какую-либо заданную величину. Следовательно, остаток цилиндра *AE*, получающийся по отнятии от него полушария, равен конусу *EDR*. Но конус *EDR*, т. е. конус *ABC*, представляет собой третью часть цилиндра *AE*. Поэтому остаток цилиндра, получающийся по отнятии от него полушария, равен третьей части цилиндра *AE*, и, значит, цилиндр *AE* втрое больше названного остатка. Поэтому цилиндр *AE* в полтора раза (sesquialter) больше полушария *ABC*. И, наоборот, полушарие равно двум третям (subsesquialterum) цилиндра *AE* или же вдвое больше конуса *ABC*. Таким образом выставленное утверждение очевидно.

Пояснительные замечания. Перенесясь от Архимеда непосредственно в XVII столетие, мы не упустили ничего имею-

[1]) Следует помнить, что это обозначает прямоугольник, построенный на *DH* и *HB*.

щего какое-либо математическое значение для нашей темы. Правда, Архимед был переведен на арабский, а в XII или XIII в. и на латынь. Но арабы не сделали из этого особенно ценного употребления. Для схоластики же математика такого рода была слишком недоступна. Как мы уже упоминали, в латинском средневековье удержалось только понятие неделимого. Только в XVI столетии снова начали понимать и самостоятельно разрабатывать вопросы этого рода.

Первое печатное издание Архимеда (на греческом с латинским переводом) вышло в Базеле в 1544 г. Несколько позднее занялся Архимедом многосторонний и талантливый итальянец Коммандино (Commandino), издавший отдельные части в латинском переводе (Венеция 1558) и написавший книжку „Liber de centro gravitatis solidorum" (Bononiae 1565), в которой он щедрым образом применил демокритовски-архимедов метод разложения тел на тонкие диски с описанными и вписанными призмами [1]). Эта книжка побудила Луку Валерио (Valerio), как он сам указывает в предисловии, приступить к самостоятельным занятиям математикой, в которых он, однако, значительно превзошел Коммандино.

В лице Валерио мы имеем перед собой одного из наиболее одаренных подражателей и последователей Архимеда. Правда, он не придерживается архимедовой строгости. Но, для того чтобы проложить пути новому методу, нужно было на первых порах несколько пожертвовать этой строгостью и больше отдаться непосредственной интуиции. В этом отношении у Валерио встречаются уже прекрасные мысли. Прежде всего он устанавливает в довольно общем виде (а не для каждого случая в отдельности) теорему, согласно которой к круглому телу можно приблизиться с любой степенью точности при помощи вписанных и описанных ступенчатых тел (I, 6 для поверхностей и I, 11 для тел). Затем во II книге он предпосылает ряд положений (II, 1—3), смысл которых согласно современному словоупотреблению заключается в том, что в каком-нибудь отношении величину, отличающуюся от другой неизменной величины A на величину, меньшую любой заданной величины ε, можно заменить в конце концов просто через A. Это представляет собой введение в несколько неловкой еще, правда, форме понятия „предела". Поэтому у Валерио отсутствуют вечные косвенные доказательства, столь утомительно длинные у Архимеда.

[1]) Фр. Мавролико (Maurolico) еще в 1518 г. перевел Архимеда на латынь, снабдив эту работу ценными собственными дополнениями. Но будучи впервые напечатан только в 1685 г., этот труд не смог оказать никакого влияния.

В вышеприведенном примере Валерио показывает таким способом, что

$$\text{цилиндр} - \text{полушарие} = \text{конусу } RDE,$$

для чего он вокруг шара описывает, а в конус вписывает ступенчатые тела. Если положить $AD = r$, $DH = x$, $BH = h$, то выкладки его сводятся к следующему. Во-первых,

$$2xh + x^2 + h^2 = r^2.$$

Далее,

$$2xh + h^2 = (r + x)h \quad \text{(преобразование)},$$

и, следовательно:

$$(r + x)h + x^2 = r^2 \; (= \overline{FH}^2).$$

Но так как $\overline{KH}^2 = (r + x)h$ (теорема о высоте в прямоугольном треугольнике), то

$$\overline{FH}^2 - \overline{KH}^2 = \overline{GH}^2 (= x^2), \qquad (I)$$

или же

$$r^2\pi h - \overline{KH}^2\pi h = x^2\pi h.$$

Ясно, что при переменном x это справедливо для любого цилиндра. Все остальное имеется у Валерио.

Принятое теперь почти во всех наших учебниках доказательство отличается от вышеприведенного лишь в том, что мы принимаем слои столь тонкими, что все ступени лестницы отпадают, короче говоря, мы рассматриваем эти слои как „неделимые“ [1]). Этот метод ввел Кавальери около 1635 г. (см. ниже № X). Весьма остроумный ход доказательства является собственным открытием Валерио, работу которого Кавальери цитирует в своем предисловии, правда, мимоходом.

IX

Яблокообразное тело Кеплера

Из „Nova Ste eometria Doliorum Vinariorum...“ Authore Joanne Keplero,.. Anno M.DC. XV. Lincil in-fol. „Joannis Kepleri Ast onomi Opera omnia“, ed Ch. Frisch, vol. IV, Francofurti a. M. et Erlangae,.. MDCCCLXIII, S. 551 и след. — Нем. перев. P. Клуга (R. Klug) в собрании классиков Оствальда, № 165, Лейпциг 1908 [2]).

---

[1]) Основное равенство (I) немедленно получается из рассмотрения треугольника KHD.

[2]) Эту книгу в популярно переработанном виде Кеплер издал на немецком языке в 1616 г. в Линце в собственном издании („Vom Authore

Предварительное замечание. Когда Кеплер, бывший уже давно знаменитым астрономом, в ноябре 1613 г. женился вторично, в Австрии случился хороший урожай винограда, и Кеплер на пути домой в Грац обратил внимание на то, что распространенное в Австрии употребление для измерения бочек „мерного шеста“ (Visierrute) очень неточно по сравнению с известным ему рейнским способом. Это побудило его исследовать вопрос математически, и в результате возникла „Новая стереометрия винных бочек“, которой предшествует в качестве введения рассмотрение некоторых общих форм тел вращения. Одним из них является тело, названное Кеплером „яблоком“ и получающееся при вращении кругового сегмента, большего, чем полукруг, вокруг своей хорды.

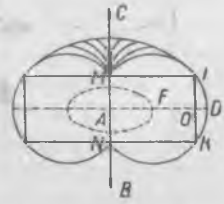
Разумеется, Кеплер читал древних греческих авторов, в частности, Аполлония и Архимеда; но его исключительная духовная самостоятельность не допускала никакого прямого подражания, а в силу своей почти необузданной фантазии он был не в состоянии ни наслаждаться, ни даже по достоинству оценить строгость Архимеда. Своим собственным исследованиям он предпосылает нечто вроде стереометрии Архимеда, но в его руках она изменяется коренным образом. Тогда как Архимед, например, утомительным косвенным путем доказывает, что площадь круга можно вычислить как площадь треугольника, основанием которого служит длина окружности, а высотой радиус, Кеплер просто говорит (1-я часть, теорема II): „окружность имеет столько частей, сколько в ней точек, а именно: бесконечно много. Будем рассматривать каждую часть как основание равнобедренного треугольника, имеющего вершину в центре и т. д.“. Таким образом он не только выбрасывает за борт метод косвенного доказательства, но и с пренебрежением отказывается от употребления величин, меньших любой заданной величины, которыми так изящно пользуется Валерио. Кеплер в своей „вольности“ доходит до того, что, например, при определении поверхности шара (тео-

---

verlegt“) под названием: „Ausszug aus der Uralten Messe-Kunst Archimedis Und der selben newlich in Latein ausgangener Ergentzung... Gestelt durch Iohann Keplern...“ („Извлечения из древнего искусства измерения Архимеда и вышедших недавно на латыни к нему дополнений... Составлено Иоганном Кеплером“). В этом издании встречаются те же тела, что и в оригинале, а также приводятся вычисления объема „цилиндрического отрезка“ („Walger-Spaltlin oder Schnitzlein“, стр. 41) и „яблоко- или айвоили тыквеннообразного тела“ („Apffel- oder Quitten- oder Kürbisrunden Raums“, стр. 44). Но все доказательства отсутствуют. Раздел „Vom Umbkrais dess Circkels“ („Об окружности круга“) находится на стр. 5.

ремы V и VI), довольствуется „вероятным“ обстоятельством, случайно лишь являющимся справедливым. Он даже выставляет теорему (теорема XXV), уже в тексте снабженную словом „повидимому“, а на самом деле неверную. Но эти недостатки компенсировались тем обстоятельством, что Кеплер обладал гениальной головой и что его совершенно нестрогий метод приводил его к поразительным результатам. Благодаря этому его „Стереометрия бочек“, к тому же значительно более распространенная, чем книга Валерио, оказала мощное влияние на повсюду пробуждавшиеся умы ученых, стремившихся продолжить дело Архимеда. В частности, из работы Кеплера почерпал многое Кавальери, в предисловии к своему труду подробно рассказывающий о „Стереометрии винных бочек“ как о единственном сочинении, которое он признает предшественником своей собственной работы (см. предш. номер, заключение).

Определению (сказать „вычисление“, собственно, нельзя, так как сила Кеплера не в алгебраическом методе) объема яблокообразного тела у Кеплера (вряд ли знавшего, что это имеется уже у Паппа) предшествует определение объема так называемого „тора“ („Kreiswulstes“), тела, возникающего при вращении круга вокруг не пересекающей его (и, самое большее, соприкасающейся с ним) оси.



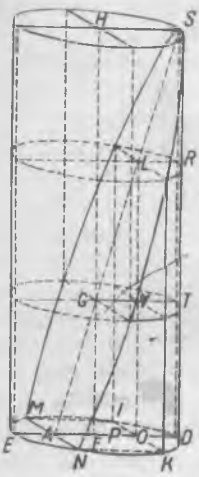
Фиг. 10.

Лист F, w⁰ („Opera“, IV, стр 584). Теорема XX. Пояс (Zone) яблока складывается из шарового пояса и прямого отрезка цилиндра. Основанием этого отрезка является сегмент, отсутствующий в фигуре, порождающей яблоко, а высота равна окружности, которую описывает центр большего сегмента.

Доказательство. Развернем тело яблока (фиг. 10) в цилиндрический отрезок (Zyl.-Huf) по тем же правилам, по которым Архимед (скорее, сам Кеплер в вольном подражании Архимеду) в теореме II разворачивает площадь круга в прямоугольный треугольник. Допустим, что *FD* является полудиаметром наибольшего круга в теле яблока (фиг. 11), и проведем через точку *D* вертикальную прямую *DS*, длина которой равна вытянутой в прямую окружности наибольшего круга и которую будем представлять себе расположенной на цилиндрической поверхности [1]). Линия *MN* представляет собой, неко-

[1]) Несовершенные гравюры на дереве первоначального издания я заменил лучшими чертежами из „Opera“.

торым образом, то общее ребро, в которое упираются все кругообразные телесные сегменты. Так как окружность наибольшего круга вытянута в прямую *DS*, то одновременно вместе с тем вытянутся все эти кругообразные тела, которые и превратятся все, за исключением первого *MDN*, в эллиптические (диски) *MSN*. Значение этого преобразования станет яснее из дальнейшего. Разложим площадь *MDN* при помощи линий, параллельных *MN*, на сколь угодно много одинаково широких, крайне малых, так сказать линиеобразных, отрезков; далее, соединим точки *A* и *S* и проведем из точек деления на диаметре *AD*, возникших в результате разложения площади, вертикали *FG* и *OL* до пересечения с прямой *AS*. Пусть *F* будет центром, и пусть перпендикуляр в *F* пересекает *AS* в точке *G*. Через точку *G* проведем *GT* параллельно *FD*. Наконец, пусть *O* будет серединой отрезка *IK*. Восставим в точке *O* перпендикуляр *OL*, пересекающий *AS* в *L*, и проведем через *L* прямую *LR* параллельно *OD*. Если теперь повернуть фигуру вокруг *MN*, то элемент площади (areola) *MN* не породит почти ничего, так как он передвинется лишь совсем немного. Но параллельный ему отрезок, проходящий через *F*, уже опишет окружность длины *FG*, а линия, проходящая через *O*, — окружность длины *OL*, и так же все остальные. Таким образом части цилиндрического тела, обозначенные через *FG* и *OL*, окажутся равными тем цилиндрическим (кольцам), которые существуют в яблоке как „туники“ (tunicae) и которые возникают, согласно теореме XVII, при вращении линий фигуры *MDN* вокруг *MN*. Следовательно, вся фигура, т. е. цилиндрический отрезок (cylindri prisma) *MNDS*, состоящий из тел всех этих туник, если их вытянуть прямо, равен всему телу яблока, состоящему из (самих) этих „туник“.



Фиг. 11.

Далее цилиндрическое тело, покоящееся на основании *IMNK* и простирающееся до *L*, если пересечь цилиндр плоскостью (planities), в которой лежат линии *OL* и *KI*, равно цилиндрической части яблока, от которого отнят внешний пояс. Поэтому отсеченная этой плоскостью (planum) небольшая часть цилиндра, именно *LSDO*, равна (телесному) поясу яблока.

Но так как GT равно FD, т. е. равно полудиаметру того шара, наибольшим кругом которого является $MIKN$, а TS представляет собой длину этого наибольшего круга (ибо GT относится к TS, как AD к DS), то цилиндрический отрезок, находящийся над GT и простирающийся до S || равен объему шара радиуса FD, а часть этого отрезка, находящаяся над GV и простирающаяся до L || [1]) равна цилиндрическому телу шара FD, получающемуся при вращении перпендикулярной к FO линии IK.

Поэтому остающаяся малая часть $LSTV$ цилиндра равна поясу того шара, поперечным сечением которого является сегмент KDI.

Но $ODSL$ состоит из $VTSL$ и цилиндрического отрезка $ODVT$, основанием которого является сегмент IKD, а высота которого FG равна (длине) окружности, описываемой при вращении фигуры вокруг MN центром F большего сегмента $MIKN$.

Поэтому и равные им (тела) находятся в том же отношении, а именно, пояс яблока складывается из шарового пояса, описываемого этим сегментом, и из названного цилиндрического отрезка.

Пояснительные замечания. Прежде всего следует заметить, что рассуждения Кеплера содержат больше, чем сказано в заголовке теоремы. Именно, они дают не только телесный пояс яблока, но и весь объем яблока. Кеплер, разумеется, это знал и в дальнейшем рассказывает подробнее, как вычислить объем всего яблока. Но внутреннюю „цилиндрическую“ (cylindraceus) часть яблока, описываемую при вращении смешаннолинейным четырехугольником $MNKI$, он, очевидно, может вычислить непосредственно, умножив площадь названного четырехугольника на длину окружности радиуса AF [2]). Поэтому он должен показать только, как вычисляется та часть яблока, которая описывается круговым сегментом IKD, т. е. телесный пояс. Отсюда и форма заглавия. Этот пояс оказывается равным шаровому поясу, сложенному с сегментом прямого цилиндра, которые оба могут

---

[1]) В оригинале отсутствует часть текста, заключенная мной в скобки ||. Она либо выпала при наборе, либо же текст был как-то искажен. Р. Клуг упустил это из виду в своем переводе (стр. 22), но в приведенных им пояснениях (стр. 113) дело изложено верно. Фриш (Frisch) также ничего не говорит об этом месте.

[2]) Т. е. окружности, описанной центром тяжести F площади, чего Кеплер, однако, не говорит.

быть вычислены элементарным образом. То обстоятельство, что все яблоко благодаря прекрасному преобразованию Кеплера переходит в цилиндрический отрезок с основанием, равным всему вращающемуся сегменту, и высотой, равной длине описываемого точкой D круга (радиуса AD), представляет собой по существу лишь побочный геометрический результат, лишенный какого-либо практического значения, так как Кеплер не был в состоянии непосредственно определить объем этого цилиндрического отрезка.

Но Кеплер производит не одно лишь преобразование, а два, существенно отличных друг от друга. Первое из них я должен рассмотреть несколько подробнее, ибо оно, как об этом свидетельствует весь перевод Р. Клуга, очевидно, осталось непонятым им.

В теореме II Кеплер показывает, что площадь круга равна треугольнику OAS, если AS равно длине окружности этого круга. Того, что я говорю далее, нет у Кеплера, но такова во всяком случае проводимая им выше в теореме XX мысль. Именно, рассечем круг вдоль радиуса OA (см. схематическую фиг. 12) и деформируем его так, чтобы малый треугольник круга OAB перешел в треугольник OAB', треугольник OBC — в треугольник $OB'C'$ и т. д., наконец, треугольник ORA — в треугольник $OR'S$. При этом круг непосредственно преобразуется в треугольник OAS.

Фиг. 12.

Именно так представляет себе дело Кеплер и в случае яблока. Он рассекает его вдоль $MNKDI$, и эта площадь остается нетронутой. Далее, он производит в яблоке сечения через ребро MN, так что возникает бесконечно много клинообразных, ограниченных каждый двумя дугами круга и конгруэнтных дисков. Затем эти диски вытягиваются в длину, причем тем более, чем далее они отстоят от $MNKDI$. При этом MN все время остается неподвижным, что соответствует центру O круга на фиг. 12, тогда как другой край доходит до прямой DS, в которую растянута наибольшая окружность яблока. Таким образом диски принимают эллиптическую форму, а последний из них, первоначально совпадавший с $MNKDI$, переходит в MNS. Таким образом цилиндрический отрезок следует представлять себе разделенным на чрезвычайно малые клинообразные диски эллиптической формы, все ребра которых совпадают с MN. Разумеется,

следовало прежде всего доказать, что эти диски образуют цилиндр; притом для вычисления подобное преобразование ничего не дало бы, ибо при подобном разложении было бы отнюдь не легче вычислить объем цилиндрического отрезка, чем самого яблока. (В случае прямоугольного треугольника дело, разумеется, обстоит иначе!)

Но второе преобразование дает снова тот же цилиндрический отрезок. Оно значительно удобопонятнее, и Кеплер также излагает его значительно яснее. Если IK представляет собой какую-либо хорду круга, параллельную MN (я не хочу наносить на чертеже новых линий), то при вращении она опишет цилиндрическую поверхность. Яблоко состоит сплошь из таких поверхностей (tunicae), которые здесь следует рассматривать как „неделимые". Толщиной этих поверхностей и возникающими благодаря ей, как бы она ни была мала, ступеньками, Кеплер пренебрегает. Если рассечь яблоко, как было указано, оставить IK нетронутой в плоскости $MNKDI$ и развернуть поверхность по плоскости, перпендикулярной к $MNKDI$, то получится прямоугольник $IKOL$ с высотой OL, равной длине окружности радиуса AO. Нетрудно доказать, что все эти прямоугольники (в качестве „неделимых"), если их поставить рядом друг с другом, образуют цилиндрический отрезок, так как верхние ребра в силу пропорциональности, существующей между длинами окружностей и их радиусами, должны лежать в одной плоскости.

Это второе преобразование пригодно для вычисления посредством современной символики. Пусть будет $FD = r$, $AF = d$, $AO = x$, $OI = y$ (причем I снова обозначает произвольную точку). Уравнение окружности тогда примет такой вид:

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2.$$

Каждая „туника" имеет поверхность

$$2y \cdot 2x\pi = 4xy\pi.$$

Сумма всех туник получится, если это выражение проинтегрировать от $x = 0$ до $x = r + d$, придав „туникам" толщину dx, благодаря чему они становятся телами.
Тогда

$$\text{объем яблока} = 4\pi \int_0^{r+d} xy\, dx = 4\pi \int_0^{r+d} x \sqrt{r^2 - (x-d)^2}\, dx.$$

Если здесь положить $x - d = \xi$, так что $dx = d\xi$, то

$$\text{объем яблока} = 4\pi \int_{-d}^{r} (\xi + d)\,(r^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\xi =$$

$$= -2\pi \int_{-d}^{r} (-2\xi\,d\xi)\,(r^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} + 4d\pi \int_{-d}^{r} (r^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\xi =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\Big|(r^2 - \xi^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-d}^{r} + 4d\pi \cdot \frac{1}{2} \text{ сегм. } MNKDI =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(r^2 - d^2)^{\frac{3}{2}} + 2d\pi \cdot \text{с гм.} = \frac{4\pi}{3}\overline{AM}^3 + 2d\pi \cdot \text{сегм.}$$

Здесь первое выражение можно рассматривать как шар, а второе — как сегмент цилиндра, которые, однако, оба не встречаются в преобразовании Кеплера.

Обозначим еще через P центр тяжести сегмента $MNKDI$ и положим $AP = p$ (чего, разумеется, нет у Кеплера), выражение $2y \cdot x$ представляет собой момент каждого отдельного неделимого сегмента (т. е. каждой хорды, параллельной MN) относительно оси MN.

Но по определению центра тяжести

$$\text{сегм.} \cdot p = 2\int_{0}^{r+d} xy\,dx;$$

так как согласно вышеприведенному это равно

$$\frac{1}{2} \text{ объема яблока,}$$

то

$$\text{объем яблока} = \text{сегм.} \cdot 2p\pi,$$

т. е. равен площади сегмента, умноженной на путь, проходимый при вращении центром тяжести, или же равен цилиндру, основанием которого служит сегмент, а высотой — описываемая точкой P окружность. Это — так называемая теорема Гульдина, справедливая для всякого тела вращения. П. Гульдин (Guldin) опубликовал ее в большой работе „De centro gravitatis“ (Viennae 1635—1641), содержащей, между прочим, также критику „Новой стереометрии“

Кеплера, но тщательно обходящей молчанием то почти достоверное обстоятельство, что Гульдин нашел эту теорему в VII книге „Synagoge“ Паппа. Что Кеплер не знал этой теоремы, это, на мой взгляд, ясно из вышеприведенного доказательства, носящего совсем иной характер. Несомненно, что Кеплеру не было также известно, что Валерио (первый) определил центр тяжести кругового сегмента.

Мы вынуждены отказаться от рассмотрения дальнейших результатов, частью имеющихся у самого Кеплера, как, например, вращения сегмента, меньшего половины круга (что дает „лимон“), и замены круга каким-либо иным коническим сечением. Нетрудно видеть, что, обрезая подобные тела, можно получить бочки.

X

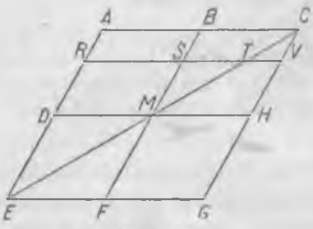
Сумма квадратов неделимых треугольника

Из „Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota“. Authore F.(ratre) Bonaventura Cavalerio Mediolan(ensi) Ord.(inis) Jesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellae. Pr. Ac. in Almo Bonon.(iensi) Gymn.(asio) Prim.(o) Mathematicarum Professore .. Bononiae,... MDCXXXV. Второе издание: Bononiae, MDCLIII.

Предварительное замечание. В противоположность Кеплеру, который в качестве мирянина-протестанта не был знаком со схоластической философией и случайно наткнулся на применение неделимых только в результате предпринятой им популяризации строгого метода Архимеда, патер Кавальери в своем большом труде, в рукописи представленном сенату Болоньи еще в 1629 г., применяет неделимые уже систематически и именно под этим названием (которого Кеплер, очевидно, не знал) применяет, как говорится в заголовке, с целью „по-новому способствовать развитию геометрии посредством неделимых (частей) непрерывных (величин)“. Так как и учитель Кавальери Галилей также был знаком с учением и применял его при теоретическом выводе закона падения[1]) и даже, как это видно из его переписки, сам собирался написать об этом книгу, то, естественно, не может быть и речи о том, что Кавальери был только подражателем Кеплера, хотя, разумеется, и его работы стимулировали деятельность Кавальери. Но неделимые и у Кавальери не определены отчетливым образом, и, вообще, у него, скорее, имеются обо всем догадки, чем доказательства. Иногда Кавальери при-

[1]) Ср. мою статью „Das Gesetz vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei“, „Z. math. nat. Unt.“, 45 (1914), стр. 209—228, из которой видно, что и Декарту не были чужды методы Архимеда.

меняет даже метод „ступенчатых“ тел. По существу, неделимое должно иметь одним измерением меньше, чем порождаемый им при движении (выражение „fluere“ — течь — встречается у Кавальери) непрерывный пространственный образ. Но неделимое у Кавальери часто обладает в неявном виде толщиной, и, по большей части, неделимые просто складываются, как и у Архимеда в „Учении о методе“. Так как выражение „все линии“ мы встречали (по смыслу) уже у Архимеда (см. выше № VII), то нас не удивит, что и Кавальери употребляет его для суммы неделимых. При этом наиболее крупное достижение Кавальери заключалось в том, что он представлял себе линиеобразные неделимые какой-нибудь площади наделенными, в свою очередь, площадями, например квадратами, так что он мог говорить о сумме квадратов неделимых какой-нибудь площади. Этот метод мог быть обобщен и привел к интегралам целочисленных степеней.



Фиг. 13.

Основная теорема содержится в следующем отрывке.

Книга II. Теорема XXIV. Предложение XXIV [1]).

Стр. 78 (2-е издание, стр. 159)[2]).

Пусть будет дан произвольный параллелограм, и пусть будет в нем проведена диагональ. Тогда все квадраты параллелограма относятся ко всем квадратам одного из двух образованных названной диагональю треугольников, как 3 : 1 (sunt in ratione tripla), если принять стороны параллелограма за общую направляющую линию (regula).

Пусть будут даны параллелограм AG и проведенная в нем диагональ CE; направляющей линией пусть будет какая-либо сторона, например EG (фиг. 13). Я утверждаю, что все квадраты (параллелограма) AG представляют собой утроенное кратное всех квадратов какого-либо из треугольников AEG или CEG (I). Разделим стороны AC и CG пополам в точках B и H и проведем через B прямую, параллельную CG, а через H — прямую, параллельную CA, т. е. (прямые) BF и DH, которые вместе с прямой CE делят друг друга пополам в точке M. Если провести в фигуре или параллелограме AG

[1]) Предложение (Propositio) — более общее понятие, теорема (theorema) же — более частное; в качестве противоположности ей противостоит задача (problema).

[2]) В 1-м издании каждая „книга“ имеет свою собственную пагинацию, во 2-м издании одна общая пагинация.

линию BF, делящую пополам все (линии), параллельные EG, и линию CE, делящую всех их, исключая DH, на неравные части, то все квадраты треугольника AEC вместе со всеми квадратами треугольника CEG равны удвоенному кратному всех квадратов (параллелограма) AF, взятых вместе со всеми квадратами двух треугольников CBM и EMF [1]); и если DH делится линией CE пополам [2]), то это ничего не говорит против нашего утверждения, ибо как для DH, так и для тех (параллелей), которые делятся на неравные части, справедливо, что квадраты отсеченных частей, т. е. квадраты DM и MH (взятые вместе), вдвое больше квадрата половины, т. е. квадрата DM, и квадрата (отрезка), помещающегося между (точками) пересечения, который здесь равен нулю, так как обе секущие BF и CE пересекаются в точке M (II). Но все квадраты треугольника AEC равны всем квадратам треугольника CEG, так как (эти) треугольники построены на одинаковых основаниях EG и AC, имеют одинаковую высоту и лишь лежат противоположным образом; поэтому все квадраты треугольника CEG равны всем квадратам AF вместе со всеми квадратами треугольников CBM и MEF (III). Далее, все квадраты треугольника BMC равны всем квадратам треугольника CMH, все же квадраты треугольника CEG находятся ко всем квадратам треугольника CMH в утроенном отношении (обеих линий) GC и CH, которое (в свою очередь) равно двум, значит, они находятся в восьмикратном отношении и это в силу того, что треугольники CEG и CMH подобны. Поэтому все квадраты CEG в восемь раз больше всех квадратов CMH и вчетверо больше всех квадратов CMH или же BCM вместе с MEF (IV). Но все квадраты треугольника CEG равны всем квадратам AF вместе со всеми квадратами треугольников CBM и MEF, и, следовательно, последние (т. е. квадраты AF и обоих треугольников) вчетверо больше всех квадратов треугольников CBM и MEF. Посредством деления [3]) отсюда получается, что все квадраты AF втрое больше тех (других). Но все квадраты AG так относятся ко всем квадратам AF, как квадрат GE к квадрату EF, т. е. как 4 : 1 (id est quadrupla), или же [4]) как 12 : 3. Далее, все квадраты AF втрое

[1]) Здесь в тексте (обоих изданий) имеется перестановка, на которую обращено внимание на стр. 508 2-го издания (но с указанием страницы, относящимся к 1-му изданию).

[2]) Здесь в тексте (обоих изданий) стоит „поп", что, очевидно, бессмысленно.

[3]) Это древнегреческое выражение для „почленного вычитания".

[4]) Здесь цифры стоят и в оригинале.

больше всех квадратов треугольников BMC и MEF; значит, все квадраты AG в двенадцать раз больше всех квадратов треугольников BMC и MEF и относятся ко всем квадратам AF, как[1]) 12 : 3. В соответствии с этим все квадраты AG относятся ко всем квадратам AF (вместе) со всеми квадратами треугольников CBM и MEF, как[1]) 12 : 4. Но, как было показано, все квадраты AF вместе со всеми квадратами треугольников CBM и MEF равны всем квадратам треугольника CEG или AEC; следовательно, все квадраты AG относятся ко всем квадратам треугольника CEG или AEC, как 12 : 4, т. е. они втрое больше последних, что и требовалось доказать (V).

Пояснительные замечания. (I) Все неделимые параллелограма AG следует представлять себе проведенными параллельно EG. На каждом неделимом следует представлять себе построенным квадрат. Для понимания дальнейшего мы условимся, что ΣAEC будет выражать сумму квадратов всех неделимых треугольника AEC. Тогда, разумеется, как это устанавливается ниже, $\Sigma AEC = \Sigma CEG$, а также и $\Sigma CBM = \Sigma EMF$ и $\Sigma AG = 4\Sigma AF$, но основной вопрос заключается в том, как относится ΣAG к ΣAEC. На это и дает ответ данная теорема, говоря, что $\Sigma AG = 3\Sigma AEC$. Легко заметить (и Кавальери, разумеется, это также было известно), что это дает объем квадратной (а значит, и всякой) пирамиды или же означает квадратуру параболы $y = x^2$. В наше время мы это выражаем так:

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}\,a^3 \quad \text{(см. выше стр. 32).}$$

При этом надо взять на чертеже $AC = a$. Для того чтобы это вычисление давало также объем пирамиды, следует только взять на чертеже также и высоту параллелограма AG равной a. При этом число неделимых параллелограма также оказалось бы равным a. То же самое получится, если принять a за величину AC, полагая при этом, что единицей измерения будет самое малое неделимое треугольника ACE, наиболее близкое к E, и полагая также, что все неделимые одинаковой толщины. Действительно, если мы обозначим самое малое неделимое ε, то следующее будет 2ε и т. д., и $n\varepsilon$ будет равно $a(\varepsilon)$, т. е. $n = a$. Площадь параллелограма AG

[1]) Здесь цифры стоят и в оригинале.

тогда равна a^2, а соответствующего параллелепипеда — a^3. Этот ход мыслей выдержан совершенно в духе Кавальери.

(II). Рассмотрим секущую RV, о которой Кавальери впервые говорит в одном дополнении (когда он уже доказал соответствующие теоремы о наделенных квадратами неделимых), и положим $ST = \lambda$. Тогда $RT = \frac{1}{2}a + \lambda$, $TV = \frac{1}{2}a - \lambda$ и, следовательно,

$$\overline{RT}^2 + \overline{TV}^2 = \left(\frac{1}{2}a + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - \lambda\right)^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\lambda^2. \quad (1)$$

Если взять все такие суммы, когда RT убывает от AC до вершины E, а TV возрастает от вершины C до EG, то λ пробежит оба треугольника CBM и EMF, между тем как $\frac{a}{2}$ пройдет параллелограм AF. Следовательно, мы можем, в духе Кавальери, записать равенство (1) так:

$$\Sigma AEC + \Sigma CEG = 2\Sigma AF + 4\Sigma BMC. \quad (1^*)$$

(III). Последнее равенство немедленно переходит в

$$\Sigma AEC = \Sigma AF + 2\Sigma BMC, \quad (1^{**})$$

причем мы, в противоположность Кавальери, только отказываемся от совершенно излишнего использования ΣEMF.

(IV). Далее следует утверждение, что

$$\Sigma AEC = 8\Sigma BMC \quad (2)$$

Здесь у Кавальери нет никаких ссылок, и, таким образом, доказательство этого утверждения отсутствует. Но если мы действительно построим квадраты на неделимых и таким путем образуем пирамиды $(BC)^2M$ [1]) и $(AC)^2E$, то легко заметить, что они действительно подобны и находятся в отношении 1 : 8, если только при этом теорема о подобных пирамидах уже является доказанной. Однако ее доказательство опирается, так или иначе, на определение объема пирамиды, а необходимая для этого последнего теорема и служит здесь предметом доказательства. Таким образом положение вещей весьма напоминает порочный круг. Здесь весь вопрос сводится к логическому порядку доказательства. Но Кавальери не был в этом силен. Мы же просто допустим справедливость этого утверждения.

---

[1]) Т. е. пирамиду, построенную на $(BC)^2$ как на основании и с вершиной в точке M.

(V). Дальнейшее для нас понятно само собой, в силу того, что мы умеем производить алгебраические вычисления, чему Кавальери научился лишь позже и притом недостаточно. Поэтому он с трудом выводит при помощи пропорций то, что мы запишем ниже.

Из (1*) и (2) следует:

$$\Sigma AEC = \Sigma AF + \frac{1}{4}\Sigma AEC, \tag{3}$$

$$\frac{3}{4}\Sigma AEC = \frac{1}{4}\Sigma AG, \tag{4}$$

и, наконец,

$$\Sigma AG = 3\Sigma AEC. \tag{5}$$

Проследить за вычислениями Кавальери только скучно, но отнюдь не трудно.

Подвергнув исследованию разрешенную Кеплером лишь приближенно проблему кубатуры параболического „веретена“ (возникающего при вращении дуги параболы вокруг своей хорды), Кавальери сам пришел к мысли заменить квадраты его неделимых в параллелограме и треугольнике биквадратами. После того как это ему удалось, он попытался в дополнение к этому вычислить, как мы выражаемся, $\int_0^a x^3\,dx$ (сообщено в 1639). Побуждаемый стимулами внешнего порядка, он затем перешел к $\int_0^a x^6\,dx$, откуда он умозаключил по аналогии о всех прочих случаях и в качестве примера привел еще $\int_0^a x^9\,dx$. Эти обобщения он опубликовал в своих „Exercitationes geometricae sex“ (Болонья 1647). Произошло это уже в то время, когда они не представляли собой новизны. Действительно, за этот промежуток времени Ферма (Fermat), которому, быть может, предшествовал Торичелли, произвел эти квадратуры при помощи не только более ясного, но и более общего алгебраического метода и притом для любых положительных рациональных степеней (для целых положительных степеней он это сделал уже в 1636 г.). Все эти исследователи были осведомлены о работе друг друга и часто взаимно обменивались, правда, с разными предосторожностями, своими дости-

жениями [1]). В те времена никто не знал о том, что объем параболического веретена (а вместе с тем и суммы кубов и биквадратов чисел) был выведен при помощи строгого архимедова метода еще ибн-Альхайтамом (Ibn Alhaitham) около 1000 г. нашей эры [2]).

XI

Острое гиперболическое тело Торичелли

Из „Opera geometrica Evangelistae Torricelli", Florentiae 1644. В частности из трактата „De solido hyperbolico acuto" (II ч., стр. 113—135). Перепечатано в „Opere di Evangelista Torricelli" ed... da Gino Loria e Giuseppe Vassura. Vol. I, Parte I, Faenza 1919. Трактат занимает стр. 191—213.

Предварительное замечание. В первую очередь, этот трактат показывает, как сразу глубоко была воспринята идея неделимых Кавальери, во-вторых, в нем приводится, как замечает (в предисловии к одной предшествующей работе о том же теле) сам Торичелли, первый случай того, что фигура, простирающаяся в бесконечность, не обладает бесконечным объемом. Речь идет о теле, получающемся при вращении равносторонней гиперболы вокруг ее асимптоты. При этом соответствующие части площади гиперболы бесконечны. Из того, что Торичелли говорит, что он применил первым (sine aliorum exemplo) криволинейные неделимые, мы должны сделать тот вывод, что он не видел „Новой стереометрии" Кеплера, где уже встречались подобные „туники" (см. выше № IX). Во всяком случае среди 38 (!) научных работ, которые находились в библиотеке Торичелли (см. в том же томе „Opere", стр. IX), книга Кеплера не числится. Линии, проведенные на чертеже пунктиром, прибавлены мною.

Стр. 115 („Opere", I, 1, стр. 193). Теорема.

Бесконечно длинное, острое гиперболическое тело, пересеченное плоскостью, перпендикулярной его оси, вместе с цилиндром, построенным на его основании, равно некоторому прямому цилиндру, диаметр основания которого равен latus versum или же оси гиперболы, а высота равна радиусу основания самого острого тела.

Пусть будет дана гипербола, асимптоты которой AB и AC [3]) образуют прямой угол (фиг. 14). Возьмем на гиперболе

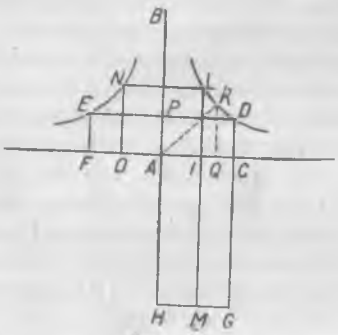
[1]) Здесь мне оказала большую пользу статья А. Босмана (H. Bosmans) „Un chapitre de l'oeuvre de Cavalieri". Mathesis, 36 (1922), стр. 365—456.

[2]) Ср. Г. Зутера (H. Suter), „Bibl. math.", 3-я серия, XII (1911/12), стр. 289 и след.

[3]) В оригинале в тексте стоят строчные буквы, а на чертеже прописные.

произвольную точку D и проведем DC параллельно AB и DP параллельно AC. Затем станем вращать всю фигуру вокруг оси AB, причем одновременно возникнут острое гиперболическое тело EBD и цилиндр $FEDC$, построенный на его основании. Продолжим, далее, BA до H так, чтобы AH было равно всей оси или же latus versum гиперболы. Затем на диаметре AH построим круг, перпендикулярный к асимптоте AC. (Наконец), представим себе, что на основании AH (т. е. на описанном круге) построен прямой цилиндр $ACGH$, высотой которого будет AC, т. е. радиус основания острого тела. Я утверждаю, что все тело $FEBDC$ хотя и бесконечно длинно, но в е же равно цилиндру $ACGH$.

Возьмем на прямой AC произвольную точку I и представим себе, что через I вокруг оси AB проведена цилиндрическая поверхность (superficies cylindrica) $ONLI$, содержащаяся в остром теле, и представим себе в цилиндре $ACGH$ круг IM, параллельный основанию AH.



Фиг. 14.

Тогда названная цилиндрическая поверхность $ONLI$ будет относиться к кругу IM, как прямоугольник OL, проведенный через ось к квадрату радиуса круга IM, т. е. как прямоугольник OL к квадрату полуоси гиперболы. Следовательно, согласно лемме (лемма I) они равны. И это верно всегда, где бы ни была взята точка I. Поэтому все цилиндрические поверхности, взятые вместе (omnes simul), т. е. самое острое тело EBD вместе с цилиндром $FEDC$ (построенным) на его основании, равны всем кругам, взятым вместе, т. е. цилиндру $ACGH$. Что и требовалось доказать.

Пояснительные замечания. Все это так просто и ясно изложено, что нуждается для пояснения лишь в немногих словах. Несомненный прогресс заключается также и в том, что цилиндрические неделимые здесь просто заменяются равными им площадями кругов, в которые они не могут быть преобразованы геометрическим путем. Торичелли предпослал теореме 5 лемм (вспомогательных теорем), которые нам здесь не нужны. Примем AC за ось x-ов, а AB за ось z-ов, тогда уравнение гиперболы будет иметь вид: $xz = d^2$; далее, $AQ = QR = d$,

AR (полуось гиперболы) $= d\sqrt{2}$. Всякий прямоугольник $ONLI$ будет в таком случае равен $2d^2$, а описываемая IL или же ON цилиндрическая поверхность будет $2x\pi z = 2d^2\pi$, т. е. будет постоянной, независимо от положения I. Но AH было взято равным $2d\sqrt{2}$, так что каждый круг цилиндра $AHGC$ имеет площадь $(d\sqrt{2})^2\pi = 2d^2\pi$. Эти круги и суть неделимые цилиндра, точно так же, как цилиндрические поверхности суть неделимые исследуемого тела. Все остальное имеется у Торичелли, который в целом ряде дальнейших теорем еще подробнее исследует свойства тела (среди прочих также и то, что объем, расположенный над плоскостью FC, бесконечен).

Если мы представим себе через точку A проведенной еще перпендикулярную к BAC ось y ов, то тело будет иметь уравнение $zr = d^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, или же, в освобожденном от радикалов виде: $z^2(x^2 + y^2) = d^4$. Следовательно, мы имеем перед собой поверхность 4-го порядка, к которой, разумеется, также принадлежит и часть, расположенная под плоскостью x, y.

Современный ход вычислений таков. Вычислим объем $NEDL$, положив $CD = a$ и $IL = b$. Этот объем равен: .

$$\int_a^b r^2\pi dz = d^4\pi \int_a^b \frac{dz}{z^2} = d^4\pi \left| -\frac{1}{z} \right|_a^b = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) d^4\pi.$$

При $b = \infty$, т. е. в случае тела EBD, это дает $\frac{d^4\pi}{a}$. Но при $z = a$ мы имеем, что $r^2 = \frac{d^4}{a^2}$; следовательно, цилиндр $EFDC$ равен $r^2\pi a = \frac{d^4\pi}{a}$. Таким образом он равен верхнему бесконечно удлиненному телу, что доказывается также и в одной из теорем Торичелли. Оба тела вместе имеют объем $\frac{2d^4\pi}{a}$. Но таков же объем цилиндра $AHGC$, радиус основания которого равен $d\sqrt{2}$, а высота $\frac{d^2}{a}$.

Тем самым Торичелли первый получил интеграл степени с отрицательным показателем ($y = x^{-1}$), что немедленно должно было стать ясным алгебраистам, к числу которых сам он, впрочем, не принадлежал.

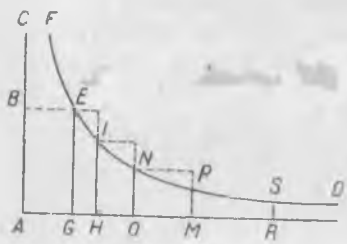
В одной дальнейшей работе он привел доказательство также посредством старого метода Архимеда. Но он не считал его лучшим (longiorem quidem, sed non ideo mihi certiorem: хотя оно и длиннее, но, на мой взгляд, не достовернее).

XII

Квадратура всех гипербол высших порядков

Из трактата „De aequationum localium transmutatione et emendatione..., cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus". „Oeuvres de Fermat", publ. par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry... Tome premier. Paris MDCCCXCI, стр. 255—288. Франц. перевод П. Таннри в „Oeuvres", III, Paris 1896, стр. 216—237.

Предварительное замечание. Трактат, из которого мы заимствуем нижеследующий отрывок, был приведен Ферма в теперешний вид только после 1657 г. Но одно сообщение, посланное Кавальери, не содержащее, впрочем, изложения метода, свидетельствует о том, что отдельные части этой работы, и в частности интегрирование парабол общего вида $y = x^n$, где число n может быть также (положительной) дробью, имелись уже в 1644 г. Тем временем Торичелли, подстрекаемый этим сообщением, открыл в 1646 г. способ обобщения его и на все отрицательные показатели. В трактате Ферма дается общая теория всех этих случаев при помощи его собственного (отличного от торичеллиевого) в высшей степени интересного метода, обогащенного многочисленными применениями к некоторым формам уравнений, которые путем преобразований могут быть приведены к вышеуказанным. Опубликовано это было, как уже сказано, впервые в „Varia Opera" Ферма (Tolosae 1679). Ниже я привожу помещенное в начале его работы исследование гипербол.



Фиг. 15.

Стр. 256 (франц. стр. 217)... Гиперболами мы по определению называем бесконечно многие кривые разного рода, как, например, $DSEF$ (фиг. 15), свойство которых таково: если взять за асимптоты кривых пересекающиеся под произвольным углом RAC прямые AR и AC, которые, подобно самой кривой, можно продолжать произвольно до бесконечности, и если

провести параллельно одной из асимптот произвольные прямые *GE*, *HI*, *ON*, *MP*, *RS* и т. д., то так же как какая-нибудь степень (potestas) прямой *AH* относится к той же степени прямой *AG*, так какая-нибудь и притом такая же или же отличная от предыдущей степень прямой *GE* относится к той же степени прямой *HI*. При этом под степенями мы понимаем не только квадраты, кубы, биквадраты (quadrato-quadrata) и т. д., показатели которых 2, 3, 4 и т. д., но и все простые стороны (latera, корни), показатель которых равен единице.

Я утверждаю, что при помощи геометрического отношения (proportionis)[1] *можно найти квадратуры всех этих бесконечно многих гипербол, за исключением только одной, аполлониевой или первой, одинаковым и ко всем им применимым способом.*

Допустим, что, например, дана гипербола, обладающая тем свойством, что всегда

прямая *GE* так относится к прямой *HI*, как квадрат прямой *AH* относится к квадрату прямой *AG*,

и что

прямая *HI* так относится к прямой *ON*, как квадрат *OA* относится к квадрату *AH* и т. д.

Я утверждаю, что бесконечная площадь, основанием которой является *GE* и границами которой служат, с одной стороны, кривая *ES*, а с другой, — бесконечная асимптота *GOR*, равна некоторой данной прямоугольной площади.

Представим себе члены некоторой простирающейся до бесконечности геометрической прогрессии (progressionis geometricae): первым членом пусть будет *AG*, вторым — *AH*, третьим — *AO* и т. д. до бесконечности, и пусть эти члены будут настолько близки друг к другу, чтобы можно было согласно методу Архимеда приравнять (adaequare), как выражается Диофант[2] или же положить приближенно равными друг другу прямолинейный параллелограмм на *GE* и *GH* (sub *GE* in *GH*) и смешаннолинейный четырехугольник *GHIE*. (Допустим), далее, что первые из прямолинейных интервалов (разностей) между изменяющимися в геометрической прогрессии величинами, т. е. *GH*, *HO*, *OM* и т. д., почти равны между собою, так что может быть без труда

[1]) Таннери переводит это слово (также и в заглавии) через progression (ряд). Но это слово не совсем соответствует намерениям Ферма, который при желании сам употребляет слово „progressio".

[2]) В своей „Арифметике", V, 11 и V, 14 (ср. 1-й выпуск), Диофант для „приближенного равенства" употребляет термин παρισότης.

применен посредством вписываний и описываний архимедов способ доказательства путем приведения к невозможному (per απαγωγὴν εἰς ἀδύνατον). Достаточно это сказать один раз навсегда, для того чтобы больше не быть вынужденными снова напоминать и повторять тот прием, который достаточно хорошо знаком каждому геометру.

Исходя из этого, а также из того, что

как *AG* относится к *AH*, так *AH* относится *AO* и так *AO* относится к *AM*,

получим, что

как *AG* относится к *AH*, так и интервал *GH* к *HO* и интервал *HO* к *OM* и т. д.

Но параллелограм на *EG* и *GH* относится к параллелограму на *HI* и *HO*,

как параллелограм на *HI* и *HO* к параллелограму на *NO* и *OM*.

Действительно, так как отношение (ratio) параллелограма на *GE* и *GH* к параллелограму на *HI* и *HO* получается из отношения прямой *GE* к прямой *HI* и отношения прямой *GH* к прямой *HO* и так как, согласно вышеуказанному,

AG относится к *AH*, как *GH* относится к *HO*,

то отношение параллелограма на *EG* и *GH* к параллелограму на *HI* и *HO* складывается из отношения *GE* к *HI* и из отношения *AG* к *AH*. Но

GE относится к *HI*, по предположению [1]), как квадрат *AH* к квадрату *GA*,

или же, на основании непрерывной пропорциональности,

как прямая *AO* относится к прямой *GA*.

Таким образом отношение параллелограма на *EG* и *GH* к параллелограму на *HI* и *HO* получается из отношения *AO* к *AG* и *AG* к *AH*. Но из них обоих получается отношение *AO* к *AH*. Следовательно, параллелограм на *GE* и *GH* относится к параллелограму на *HI* и *HO*, как *OA* к *HA* или же как *HA* к *AG*.

Подобным же образом доказывается, что параллелограм на *HI* и *HO* относится к параллелограму на *ON* и *OM*, как *AO* к *HA*.

Но три прямые, выражающие собой отношения параллелограмов, т. е. прямые *AO*, *HA*, *GA*, образуют по предположению (непрерывную) пропорцию; следовательно, бесконечно многие параллелограмы, на *GE* и *GH*, на *HI* и *HO*, на *ON* и *OM*, все образуют непрерывную пропорцию с отношением, (в кото-

[1]) В оригинале стоит: ex constructione.

ром находится) прямая *HA* к *GA*. Поэтому согласно основоположной теореме нашего метода,

так же как *GH*, разность членов отношения, относится к меньшему члену *GA*,
так и первый член ряда параллелограмов,
т. е. параллелограм на *EG* и *GH*,
относится ко всем остальным бесконечно многим параллелограмам,

т. е. на основании „приравнивания", по Архимеду, к фигуре, образуемой *HI*, асимптотой *HR* и простирающейся до бесконечности кривой *IND*.

Но если рассматривать прямую *GE* как общую ширину, то параллелограм на *GE* и *GH* относится к параллелограму на *GE* и *GA*, как *HG* к *GA*. Следовательно,

так же как параллелограм на *GE* и *GH*
относится к упомянутой бесконечной фигуре с основанием *HI*,
так тот же параллелограм на *GE* и *GH*
относится к параллелограму на *GE* и *GA*.

Следовательно, параллелограм на *GE* и *GA*, т. е. данная прямолинейная площадь, „приравнен" ранее названной фигуре. Если к этому прибавить (с обеих сторон) параллелограм на *GE* и *GH*, который в силу крайней малости делений (minutissimas τεμαχισμούς) исчезает и обращается в ничто, то оказывается вполне истинной легко подтверждающаяся посредством архимедова (разумеется, более хлопотливого) доказательства (теорема): параллелограм *AE* у гипербол такого рода равен фигуре, ограниченной основанием *GE*, асимптотой *GR* и простирающейся до бесконечности кривой *ED*.

Далее, Ферма принимает, что *GE* и *HI* относятся, как кубы *HA* и *GA*, и доказывает, что тогда параллелограм *AGEB* равен удвоенной смешаннолинейной бесконечной фигуре, примыкающей к *GE*.

(260)... Подобным же образом можно провести доказательство и для всех других случаев, и этот метод изменяет только в случае первой (или аполлониевой и простой) гиперболы в силу того единственного обстоятельства, что для нее все параллелограмы *EH*, *IO*, *NM* равны между собой, и так как члены прогрессии равны между собой, то между ними нет никакой разности, а в этой разности и заключается вся суть (mysterium) дела.

Далее, у Ферма рассматривается общее правило для парабол и затем дается следующее общее правило для гипербол.

(266, франц. 224)... Столь же легко находится общее правило и для гипербол. А именно, для любой гиперболы, параллелограм BG относится к простирающейся до бесконечности фигуре $RGED$, как разность показателей степеней ординаты (applicatae) и абсциссы (diametri) к показателю степени ординаты.

Пояснительные замечания. Так как рассуждения Ферма легко понятны сами по себе, то мы только приведем выкладки в современной форме. Положим:

$$\begin{aligned} AG &= x_0, & GE &= y_0, \\ AH &= x_1, & HI &= y_1, \\ AO &= x_2, & ON &= y_2, \\ AM &= x_3, & MP &= y_3, \\ AR &= x_4, & RS &= y_4, \end{aligned}$$

тогда по предположению:

$$x_1^2 : x_0^2 = y_0 : y_1 \text{ и т. д.,}$$

или же

$$y_1 x_1^2 = y_0 x_0^2 = \text{const},$$

или же, как мы примем,

$$y x^2 = 1.$$

Допустим, что $x_1 = \varepsilon x_0$, $x_2 = \varepsilon x_1 = \varepsilon^2 x_0$, $x_3 = \varepsilon x_2 = \ldots = \varepsilon^3 x_0$ и т. д., причем $\varepsilon > 1$ и вместе с тем таково, что разности

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= x_0 (\varepsilon - 1), \\ x_2 - x_1 &= x_0 \varepsilon (\varepsilon - 1), \\ x_3 - x_2 &= x_0 \varepsilon^2 (\varepsilon - 1) \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

образующие геометрическую прогрессию с тем же знаменателем, что и сами абсциссы, очень близки друг к другу [1]).

Из этого немедленно следует:

$$\frac{\text{пар. } EH}{\text{пар. } IO} = \frac{\text{пар. } IO}{\text{пар. } NM} = \ldots = \frac{y_0 (x_1 - x_0)}{y_1 (x_2 - x_1)} = \ldots = \frac{x_1^2}{x_0^2 \varepsilon} = \varepsilon,$$

т. е. следующие одни за другими прямоугольники образуют геометрическую прогрессию с знаменателем ε.

Этой теореме Ферма предпослал „основоположную теорему“, а именно теорему о сумме геометрической прогрессии. Эта тео-

[1]) Если, например, MR должно быть только на 1% больше, чем GH, то $\varepsilon^3 = 1{,}01$ и нужно взять $\varepsilon = 1{,}0033$.

рема, если первый член обозначить a, знаменатель $q < 1$ положить равным $u:v$ и всю сумму обозначить S, гласит:

$$(v - u) : u = a : (S - a).$$

Отсюда получается:

$$S - a = a \cdot \frac{u}{v - u} = a \frac{q}{1 - q}; \; S = \frac{a}{1 - q}.$$

Членами прогрессии здесь являются параллелограмы EH, IO, NM... Следовательно,

$$a = \text{пар. } EH = y_0 (x_1 - x_0) \sin A,$$

$$q = \text{пар. } IO : \text{пар. } EH = \frac{1}{\varepsilon},$$

и, значит,

$$S = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon - 1} = \frac{y_0 x_0 \; (\varepsilon - 1) \sin A}{\varepsilon - 1} = x_0 y_0 \sin A = \text{пар. } AGEB.$$

Это — первый результат Ферма, который мы для $A = 90°$ можем записать так:

$$S = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x_0}.$$

Во втором примере Ферма $yx^3 = 1$, и результат будет таков:

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} x_0 y_0 = \frac{1}{2x_0^2}.$$

Наконец, для гиперболы

$$y^n x^m = 1 \qquad (m > n)$$

общая теорема Ферма утверждает, что

$$S = \int_{x_0}^{\infty} x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m - n} x_0 y_0 = \frac{n}{m - n} x_0 x_0^{-\frac{m}{n}} = \frac{n}{m - n} x_0^{\frac{n - m}{n}},$$

что вполне согласуется с нашим общим, получающимся посредством неопределенного интегрирования, результатом:

$$\left| \left(-\frac{m}{n} + 1 \right)^{-1} \cdot x^{-\frac{m}{n} + 1} \right|_{x_0}^{\infty} = \frac{n}{m - n} x_0^{\frac{n - m}{n}}.$$

В современном алгебраическом обозначении общее доказательство Ферма для гиперболы

$$y^n x^m = 1 \qquad (m > n)$$

протекает следующим образом. Известно, что

$$a = \text{прямоуг. } EH = y_0(x_1 - x_0) = y_0 x_0(\varepsilon - 1) =$$
$$= x_0^{-\frac{m}{n}} x_0 (\varepsilon - 1) =$$
$$= x_0^{\frac{n-m}{n}} (\varepsilon - 1);$$

$$q = \frac{\text{прямоуг. } IO}{\text{прямоуг. } EH} = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_0(x_1 - x_0)} = \frac{x_1^{-\frac{m}{n}} \varepsilon}{x_0^{-\frac{m}{n}}} = \varepsilon^{-\frac{m}{n}} \varepsilon = \varepsilon^{\frac{n-m}{n}};$$

$$S = \frac{x_0^{\frac{n-m}{n}} (\varepsilon - 1)}{1 - \varepsilon^{\frac{n-m}{n}}} = -x_0^{\frac{n-m}{n}} \frac{\eta_1^n - 1}{\eta_1^{n-m} - 1} \quad \left(\text{где } \eta_1 = \varepsilon^{\frac{1}{n}}\right) =$$
$$= -x_0^{\frac{n-m}{n}} \frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1^{n-1} + \eta_1^{n-2} + \ldots + \eta_1 + 1)}{(\eta_1 - 1)(\eta_1^{n-m-1} + \eta_1^{n-m-2} + \ldots + \eta_1 + 1)}.$$

Множитель, стоящий справа, после сокращения на $\eta_1 - 1$ и при $\lim \varepsilon = 1$ (а значит, и при $\lim \eta_1 = 1$), переходит в $\frac{n}{n-m}$. Отсюда получается, как и выше:

$$S = -\frac{n}{n-m} x_0^{\frac{n-m}{n}}.$$

Если оставить пока в стороне своеобразное деление оси абсцисс, то крупным достижением Ферма является то, что он, пользуясь становящимися все меньше и меньше частями площадей, производит настоящее интегрирование, считая само собою разумеющимся косвенное доказательство Архимеда (по существу необходимое) и попросту отождествляя (если только разность достаточно мала) маленькие прямоугольники с соответствующими смешаннолинейными частями площади. Хотя Ферма и не говорит нигде о предельном значении, получающемся, когда названное нами выше ε отношение стремится к 1, но в действительности он должен был обладать представлением о подобном пределе (как мы это уже установили и для самого Архимеда); по способу же выражения он, во всяком случае, ближе к этой концепции, чем Архимед.

Что касается разделения оси абсцисс на отрезки, образующие геометрическую прогрессию, то следует заметить, что сам Ферма иногда называл свой метод „логарифмическим“ [1]). Наиболее ясно это в случае обыкновенной гиперболы, где при таком подразделении части площади между собою равны и где, следовательно, арифметической прогрессии площадей соответствует геометрическая прогрессия отрезков на оси абсцисс. Сопоставление двух подобного рода рядов исторически привело к открытию логарифмов, и мы теперь говорим наоборот: площадь обыкновенной гиперболы измеряется логарифмом абсциссы. Если уравнение кривой будет $xy = 1$, то символически это записывается так:

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{-1}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x}\,dx = \ln x_1 - \ln x_0 \quad \text{при } x_0 > 0 \text{ и } x_1 > 0.$$

Эти выражения не могут быть распространены на случай $x = \infty$ и в этом отношении образуют исключение по сравнению со все и остальными значениями $\frac{m}{n}$. Это свойство квадратуры обыкновенной гиперболы, по существу, было отмечено еще в 1647 г. Григорием из Сент Винцента в его „Opus Geometricum“. Правда, рассматриваемая площадь бесконечно велика не только при $\frac{m}{n} = 1$, но и при $\frac{m}{n} < 1$, но в этом случае остаются конечными площади, примыкающие к оси y-ов, и дело сводится к перемене местами обеих осей.

Деление отрезка на части, образующие геометрическую прогрессию, встречается уже у некоторых схоластиков XIV в. [2]). Не лишено вероятности, что Ферма сам был знаком с такими работами. Но еще более вероятно это по отношению к самому Непер, изобретателю логарифмов, хотя литературных свидетельств об этом в настоящее время и не имеется. Таким образом вероятно, что своей столь плодотворной идеей разделения основания на отрезки, образующие геометрическую прогрессию, Ферма непосредственно обязан Неперу и, по крайней мере косвенным образом, схоластикам

[1]) См. H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert, Leipzig 1903, стр. 268 (готовится русский перевод). Логарифмы открыл первым Джон Непер (Neper) в 1614 г.

[2]) См. мою статью „Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter“, Bibl. math., 3-я серия (1913/14), стр. 150—168.

XIII

Метод максимумов и минимумов у Ферма

Из „Oeuvres de Fermat", pub'. par ... P. Tannery et Ch. Henri. Tome I' Paris 1891. Ф. франц. пер. П. Таннри в III т., Paris 1899.

Стр. 133 (франц. стр. 121).

Метод исследования наибольших и наименьших значений

Все учение о нахождении наибольших и наименьших значений основывается на том, что принимают две неизвестные[1]) и применяют следующее единственное правило:

Допустим, что A представляет собой какую-либо (неизвестную) исследуемую величину — поверхность, либо тело, или же длину в соответствии с условиями задачи, — и выразим максимум или минимум через члены, содержащие A в тех или иных степенях. Затем возьмем для прежней величины значение $A + E$ и снова выразим максимум или минимум через члены, содержащие A и E в тех или иных степенях. Затем обе совокупности, выражающие наибольшее или наименьшее значение, положим, как говорит Диофант, приближенно равными друг другу[2]) и отбросим на обеих сторонах одинаковые члены. Тогда в каждом члене справа и слева будет стоять либо E, либо какая-нибудь его степень. Затем разделим все члены на E или же на высшую степень его так, чтобы (по крайней мере) один из членов на какой-либо стороне был совершенно свободен от множителя E. Затем на обеих сторонах зачеркнем члены, содержащие E или его степени, а то, что останется, положим равным друг другу или же, если на одной из сторон ничего не останется, то — что сводится к тому же — приравняем отрицательные члены положительным. Решение последнего уравнения даст значение A; когда же последнее известно, то максимум или минимум получится на основании ранее проделанного решения.

Приведем следующий пример: *отрезок (recta) AC требуется так разделить в E, чтобы прямоугольник AEC был наибольшим* (фиг. 16).

Обозначим отрезок AC через B, одну часть B назовем A, так что другая будет $B - A$, а прямоугольник на отрезках

[1]) Как и Кардан (Cardano), Ферма „неизвестные" называет „positio" и к этому прибавляет „in notis", т. е. „записанные при помощи букв".

[2]) См. выше, стр. 71.

будет B на $A - Aq$, — и это должно иметь наибольшее значение[1]). Положим теперь с другой стороны одну часть B равной $A + E$, так что другая будет $B - A - E$, и прямоугольник на отрезках будет B на $A - Aq + B$ на E — два A на $E - Eq$, что должно быть приближенно равно прямоугольнику B на $A - Aq$.

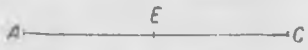
Отбросив одинаковые члены, получим, что B на E приближенно равно двум A на $E + Eq$, и если все это поделить на E, то получится, что B приближенно равно двум $A + E$.

Если отбросить E, то B равно двум A.

Таким образом решением задачи является деление B пополам, и не может существовать более общего метода.

Затем Ферма применяет свой метод также к определению касательной к параболе. Он определяет подкасательную, но у него еще не встречается характеристический треугольник (см ниже № XIV). Парабола служит для него здесь только примером.

Стр. 136 (франц. стр. 123)... И этот метод никогда не изменяет, напротив того, он может быть распространен на многочисленные прекрасные проблемы. Действительно, с его помощью мы определили центры тяжести фигур, ограниченных кривыми линиями и прямыми, и центры тяжести тел и многое другое, о чем я, может быть, расскажу, если у меня будет досуг...



Фиг. 16

Далее следует — относящееся к тому же времени — применение метода, хотя и не в чистом его виде, к определению центра тяжести параболоида вращения.

Пояснительные замечания. Как это следует из переписки Ферма, свой метод последний открыл еще в 1629 г., и вышеприведенные отрывки представляют собой самое первое изложение его, которое он переслал в 1638 г. Роберналю (Roberval) и Декарту. Максимумы и минимумы, а также и касательные определяли в отдельных случаях еще древние математики, но это всегда осуществлялось посредством геометрических методов. Ферма дал первый алгебраический метод, связанный с диференциальным исчислением. (Об алгебраическом методе Декарта см. III выпуск.) Если ввести современные обозначения, то Ферма поступает следующим образом. Положим x вместо A и h вместо E.

[1]) Я полагаю, что читатель сам справится с нижеследующими алгебраическими выкладками, еще вполне сохранившими старомодную форму алгебры Виета (Viète) (см. I выпуск, гл. XVIII), и что его не смутит двоякого рода употребление букв A и E.

Тогда величина y, которая должна принять экстремальное значение, выразится сперва $y = f(x)$, а затем $y = f(x + h)$. Далее, кладут

$$f(x + h) \approx f(x).$$

Затем все переносится в одну сторону и делится на h, если принять для простоты, что налицо имеются линейные относительно h члены. Таким образом мы можем написать:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \approx 0$$

Далее, не давая этому никакого объяснения, Ферма опускает члены, в которых еще содержится h. Для случая непрерывных кривых это дает то же, что и приравнение h нулю (или же лучше постепенное приближение его к нулю). Но тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0,$$

а это не что иное, как условие обращения в нуль производной $f'(x)$.

Ферма, однако, не только далек от этого способа выражения и содержащегося в нем перехода к пределу, но он, несомненно, и не думал о том, чтобы положить h вообще равным нулю. До последнего времени не было известно принадлежащего ему объяснения своего метода (хотя он посылал такие объяснения друзьям). Но недавно было найдено одно письмо Ферма от 1643 г., в котором он пытается доказать правильность своего метода. Вследствие значительных размеров этого доказательства мы не можем его здесь воспроизвести. Но из него видно, что Ферма представлял себе h всегда конечным. Для него представлялось существенным то обстоятельство, что выражения $f(x + h)$ и $f(x - h)$ должны быть оба одновременно либо меньше, либо больше, чем $f(x)$ [1]).

Таким образом для непрерывных и диференцируемых функций метод Ферма дает как раз производные, но у самого Ферма представление о них совершенно отсутствует. Однако из каждого его слова следует, что он вполне сознавал большое значение своего метода. Сохранились также и другие многочисленные приложения этого метода, сделанные Ферма позднее [2]).

---

[1]) См. изданный C. de Waard дополнительный том (т. V) „Oeuvres", Paris 1922, стр. 120—125.

[2]) Впрочем, среди позднейших работ имеется одна, в которой встречается переход к пределу. См. об этом мою статью в Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.

XIV

Характеристический треугольник Паскаля. Тригонометрические интегралы

Из LETTRE DE A. DETTONVILLE A MONSIEVR DE CARCAVY, EN LVY ENVOYANT... Vn Traitté des Sinus du quart de Cercle... A PARIS, M.D C. LVIII. Напечатано (с факсимиле титульного листа) в „Oeuvres de Blaise Pascal publiées... par Léon Brunschvicg, Pierre Boutroux et Félix Gazier, тт. VIII и IX, Paris 1914.

Предварительное замечание. Имя Амос Деттонвилль (Amos Dettonville)—псевдоним, принятый Паскалем в конце 1658 г., представляет собой анаграмму другого его псевдонима Луи де Монтальт (Louis de Montalte) [1]), под которым он издал в 1656/57 г. свои знаменитые „Lettres provinciales“. Каркави был юристом, поддерживавшим обширные научные связи. В письме, собственно говоря, речь идет о решении одной задачи о циклоиде, выставленной незадолго перед тем Паскалем на соискание премии. Но к письму приложено несколько небольших работ, относящихся к проблемам инфинитезимальной геометрии, из одной из которых мы приводим несколько отрывков. Хотя Паскаль первоначально познакомился с неделимыми у Кавальери (см. выше № X), но после 1654 г. он усвоил из сочинения иезуита А. Таке (Tacquet) „Cylindricorum et Annularium libri IV...“ (Antverpiae MDCLI) значительно более строгую их концепцию, которую он излагает подробнее в этом же письме („Oeuvres“, VII, стр. 351 и сл.). Заметим еще, что, по крайней мере, косвенным образом Таке был учеником своего товарища по ордену и соотечественника Григория из Сент Винцента, в сочинении которого „Opus geometricum“ (Antverpiae MDCXLVII) также встречаются заслуживающие внимания интеграции. В свою очередь Григорий был знаком с сочинениями по статике фламандца Симона Стевина (см. I выпуск), которые тот опубликовал первоначально на родном языке в 1595 г. [2]) и которые были переведены в 1608 г. (в „Hypomnemata math.“) по-латыни и в 1634 г. (в „Oeuvres“) по-французски, благодаря чему приобрели всеобщую известность. Установление этих взаимозависимостей, которые точным образом были

---

[1]) Это имя представляет намек на „высокую гору“ Пюи де Дом близ Клермона, на которой в 1648 г. Паскаль через посредство своего шурина поставил известный опыт с барометром. См., например, B. E. Gerland, Geschichte der Physik, München 1913, стр. 427.

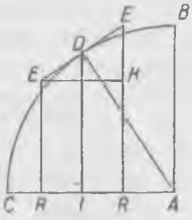
[2]) De Beghinselen der Weeghconst, De Weeghdaet и De Beghinselen des Waterwichts; все три вышли по отдельности в Лейдене.

раскрыты А. Босманом, важно потому, что Стевин первым, по всей вероятности, заменил в своей статике метод косвенного доказательства Архимеда, сочинения которого в большей или меньшей степени изучали тогда, разумеется, все математики, прямым методом пределов [1]).

„Oeuvres", IX, стр. 60

Трактат о синусе четверти круга. Лемма

Пусть *ABC* (фиг. 17) представляет собой четверть круга, радиус *AB* которого будет служить осью, а перпендикулярный к нему радиус *AC* — основанием. Пусть *D* будет произвольной точкой на дуге, и из этой точки пусть будет опущен синус *DI* на радиус *AC*; (проведем) касательную (la touchante) *DE*, на которой возьмем произвольным образом точки *E*. Из точек *E* опустим перпендикуляры *ER* на радиус *AC*.



Фиг. 17.

Тогда я утверждаю, что прямоугольник, построенный на синусе *DI* и касательной *EE*, равен прямоугольнику, построенному на отрезке основания (заключающемся между параллелями) [2]) и на радиусе *AB*

Действительно, радиус *AD* относится к синусу *DI*, как *EE* к *RR* или же к *EK*. Это явствует из прямоугольных и подобных треугольников *DIA* и *EKE*, так как угол *EEK* или *ED* равен углу *DAI*.

Теорема I

Сумма синусов какой-нибудь дуги четверти круга равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус.

Три следующие теоремы дают соответствующие значения для суммы квадратов, кубов и биквадратов синусов, после чего Паскаль говорит: „и так далее до бесконечности" (à l'infiny). Затем следует „подготовление доказательства", из которого мы в пояснение к приводимому ниже чертежу приведем указание,

---

[1]) См. две статьи А. Босмана о методе бесконечно-малых Стевина в „Ann. Soc. Scient.", Brux 37 (1912) и в „Mathesis" 37 (1923), затем небольшую заметку о Григории из Ст. Винцента в „Ann. Soc. Scient.", Brux. 44, I (1924) и две статьи о Паскале: одну, представляющую подробный обзор его деятельности (в 63 страницы), в „Revue des Quest. scient" (янв. и апр. 1924) и другую о понятии неделимых у Паскаля в „Archivio di Storia d. Sc.", 4 (1923).

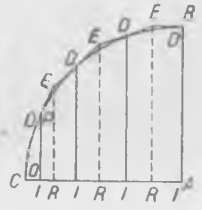
[2]) Скобки стоят в оригинале.

что, начиная от B до P, на четверти окружности в точках D отложены равные дуги и проведены синусы DI, до последнего синуса PO. Точки E служат точками пересечения касательных, проведенных в точках D; затем опущены перпендикуляры ER

Доказательство теоремы I

Я утверждаю, что сумма синусов DI [само собой разумеется, каждого умноженного на одну из равных дуг DD (фиг. 18)] [1]) равна прямой AO, умноженной на радиус AB.

Действительно, если провести во всех точках D касательные DE, каждая из которых пересекает соседнюю с ней в точке E, и опустить перпендикуляры ER, то видно, что каждый синус DI, умноженный на касательную EE, равен каждому расстоянию RR, умноженному на радиус AB. Следовательно, прямоугольники, построенные на синусах DI, каждый из которых умножен на свою касательную EE (которые все равны между собою), взятые все вместе (ensemble), равны взятым вместе прямоугольникам, образованным из всех отрезков RR и радиуса AB, т. е. (так как одна из касательных EE служит множителем для каждого из синусов и радиус AB — множителем для каждого из отрезков) [2]) сумма синусов DI, умноженных каждый на одну из касательных EE, равна сумме расстояний RR или же AO, умноженному на AB. Но каждая касательная EE равна каждой из равных дуг DD. Следовательно, сумма синусов, умноженная на одну из малых равных дуг, равна расстоянию AO, умноженному на радиус.



Фиг. 18.

Замечание

Когда я говорю, что все расстояния RR, вместе взятые, равны AO, а также, что каждая касательная EE равна каждой из малых дуг DD, то не следует этому удивляться, так как достаточно хорошо известно, что хотя на деле этого равенства и не существует, если множество синусов конечно, но, тем не менее, это равенство существует, если это множество неограниченно (indefinie). *Ибо тогда сумма всех равных между собою касательных EE отличается от всей дуги BP или же от суммы всех равных дуг DD только на величину, меньшую любой заданной*

[1]) Скобки стоят в оригинале.
[2]) Скобки стоят в оригинале.

величины. То же самое имеет место и для суммы RR всего (отрезка) AO.

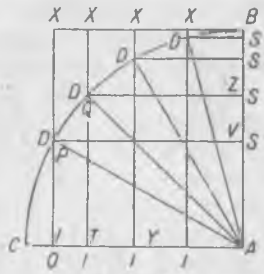
Затем следуют доказательства теорем II, III, IV.

Стр. 67. Следствие.

Из первой теоремы следует, что сумма синусверзусов дуги равна избытку, на который дуга превосходит расстояние между крайними синусами, умноженному на радиус.

Я утверждаю (фиг. 19), что сумма синусверзусов *DX* равна избытку, на который дуга *BP* превосходит прямую *AO*, умноженному на *AB*.

Действительно, синусверзусы — это не что иное, как избытки, на которые радиус превосходит прямые синусы. Следовательно, сумма синусверзусов *DX* равна радиусу *AB*, взятому столько же раз, т. е. радиусу, умноженному на все малые равные дуги *DD*, т. е. умноженному на целую дугу *BP* без суммы прямых синусов *DI* или же без прямоугольника из *BA* и *AO*. Вследствие этого сумма синусверзусов *DX* равна прямоугольнику из радиуса *AB* и разности между дугой *BP* и прямой *AO*.



Фиг. 19.

Пояснительные замечания. Паскаль объясняет все сам, и изложение его очень ясно; поэтому то, что он говорит, понятно без дальнейших объяснений. Я укажу здесь только на более глубокий смысл и значение этих небольших отрывков. Прежде всего, скажем то, что говорит не в пользу Паскаля. Паскаль, несмотря на то, что „Геометрия“ Декарта вышла еще в 1637 г. на его родном языке и в 1649 г. по-латыни (см. III выпуск), не научился еще производить алгебраических выкладок. Поэтому он, подобно Архимеду, все выражает словами. В этом отношении современнее его даже Ферма, который, как известно, еще в значительной степени придерживался метода древних (см. III выпуск).

Кроме того, из „Геометрии“ Декарта Паскаль мог бы научиться употреблению индексного обозначения $1E$, $2E$, $3E$, которое также принесло бы пользу его изложению.

Если мы рассуждения Паскаля переложим на наш язык, то прежде всего мы получим равенство:

$$DI \cdot EE = AB \cdot RR,$$

или же, вводя координаты и обозначения диференциального исчисления:

$$y\,ds = r\,dx.$$

В результате интегрирования, которое и выражает собой теорема I, мы получим:

$$\int_0^s y\,ds = r\int_0^x dx. \qquad (1)$$

Это, во всяком случае, представляет собой значительное упрощение, ибо интеграл, стоящий слева, много сложнее, чем правый, который дает просто rx и, значит, r^2, если интегрировать в пределах целой четверти.

Если ввести угол $DAB = \varphi$, то мы будем иметь:

$$y = r\cos\varphi, \qquad s = r\varphi, \qquad x = r\sin\varphi$$

и получим, что

$$\int_0^{\varphi} r\cos\varphi\, d(r\varphi) = r\int_0^{\varphi} d(r\sin\varphi),$$

или же

$$\int_0^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\varphi} d(\sin\varphi) = \sin\varphi. \qquad (2)$$

Путем введения угла DAI можно было бы точно так же получить:

$$\int_0^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi.$$

При тех же обозначениях следствие, трактующее о синус-версусах, дает интеграл:

$$\int_0^{\varphi} (r - r\cos\varphi)\, d(r\varphi) = r(r\varphi - r\sin\varphi),$$

или же просто

$$\int_0^{\varphi} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \varphi - \sin\varphi. \qquad (3)$$

Уже два эти результата весьма интересны, но значение теорем Паскаля гораздо глубже. Я не могу коснуться всех многочисленных применений, сделанных самим Паскалем по отношению к цилиндрическому отрезку и телам вращения (и их центрам тяжести), и ограничусь в основном тем, что можно найти в самой четверти круга, хотя бы этого и не было в явном виде у самого Паскаля, потому ли, что он это опустил сознательно, или же потому, что это представлялось ему лишь маловажным частным случаем. Но все последующее выдержано вполне в духе Паскаля.

Прежде всего, стоящее под знаком интеграла в левой части (1) выражение представляет собой момент элемента дуги относительно оси AC, и, следовательно, сам интеграл — момент всей дуги относительно этой оси. Благодаря этому может быть вычислен центр тяжести любой дуги окружности. Паскаль еще не употреблял термина „момент". Но вопрос о центре тяжести дуги окружности был решен уже П. Гульдином (Guldin) в его, известной Паскалю, книге „De centro gravitatis" (Viennae 1634—1641 гг.). Подробнее касаться этого я не стану.

Если повернуть четверть окружности вокруг оси AC на 90°, то EE (или DD) опишет маленькую полосу, которую можно рассматривать как прямоугольник, площадь которого в дифференциальном обозначении (пренебрегая членами высших порядков) равна $\frac{1}{2}\pi y\, ds$. Следовательно, уравнение (1) непосредственно дает для поверхности восьмой части шара величину, равную $\frac{1}{2}\pi r^2$, и, значит, для поверхности всего шара $4r^2\pi$. Этот способ изложения перешел во многие учебники; Архимеду он еще не был известен, ибо в противном случае он, несомненно, заменил бы им свои, по меньшей мере, утомительные рассуждения. Паскаль, безусловно, должен считаться автором этого метода, хотя он и не взял в качестве примера именно шаровую поверхность. Когда в 1673 г. Лейбниц, бывший тогда еще совершенно неопытным новичком в математике, прочел, по совету Гюйгенса, это письмо Паскаля, он моментально понял все значение вспомогательной теоремы и немедленно применил ее для вычисления поверхностей

тел вращения общего типа. Правда, как он вскоре убедился, это не представляло собой чего-либо совершенно нового. Но зато позднее Лейбниц построил свое дифференциальное исчисление на треугольнике EEK, вскоре им названном „характеристическим треугольником". В одном письме к Чирнгаузену (Tschirnhaus) от 1679 г. он сам говорит, что этот первый чертеж Паскаля „осенил его лучом нового света". Впрочем, позднее он применял характеристический треугольник в том виде, в каком он дан на фиг. 19 [1]).

Объем восьмой части шара можно, разумеется, тотчас же вычислить, умножив величину четверти круга $\frac{1}{4}\pi y^2$ на dx и рассматривая получающийся цилиндрический слой как элемент объема шара. Тогда

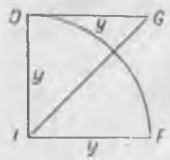
$$\frac{1}{4}\pi\int_0^r y^2 dx = \frac{1}{4}\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{4}\pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{1}{6}\pi r^3,$$

и, значит, объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$. Это мог сделать еще Кавальери (см. выше № X). Заметим только, что когда Паскаль интегрирует по s, то он делит на равные части (ds) дугу BP, а интегрируя по x, делит на равные части (dx) AO. Так как Паскаль всегда точно указывает, каковы те маленькие отрезки, на которые он умножает неделимые, то он может систематически избегать ошибок, которые легко возникают при непосредственном употреблении неделимых (см. выше, стр. 64).

Далее, Паскаль в точках D повсюду восстанавливает к плоскости четверти круга перпендикуляры, каждый из которых равен y. Если соединить их концы G (фиг. 20, сходная в основном с черт. Паскаля VIII, стр. 372) с соответствующими им точками I, то все прямые GI будут лежать в плоскости, проходящей через AC и наклоненной под углом в 45° к основной плоскости; при этом прямые DG образуют цилиндр. Таким образом получается так называемый цилиндрический отрезок. Элемент его поверхности в нашем обозначении равен $y\,ds$, и, следовательно, поверхность цилиндрического отрезка представляет собой непосредственную интерпретацию уравнения (1), т. е. для находящейся в первой

[1]) Об отношении Лейбница к Паскалю см. важную работу Д. Манке (D. Mahnke) „Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis", Abh. Ak. Wiss Berlin. Jahrg. 1925, Phys. math. Kl № 1, стр. 37).

четверти его части мы получаем просто r^2. На фиг. 20 обозначена также отсекаемая в ранее построенном шаре четверть окружности DIF. Подобная же фигура получается, разумеется, при пересечении любой поверхности вращения, и Паскаль доказывает, что поверхности соответствующего отрезка и тела вращения относятся, „как радиус к четверти окружности“ (VIII, стр. 376). Действительно, наш отрезок и восьмая часть шара находятся в отношении $r^2 : \frac{1}{2} r^2\pi = 2 : \pi$.



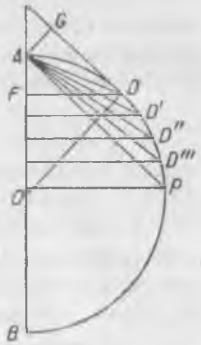
Фиг. 20.

Но это же отношение справедливо и для объемов отрезка и тела вращения (VIII, стр. 376). Для тела вращения элемент объема равен четверти круга DIF, умноженной на dx, для отрезка он равен треугольнику DIG, умноженному на dx. Получающиеся при сечении фигуры подобны при любом положении сечения. Для соответствующего четверти окружности отрезка мы получаем:

$$= \frac{1}{2} \int_0^r y^2\, dx = \frac{1}{3} r^3.$$

Объем восьмой части шара равен $\frac{1}{6} r^3\pi$, и, следовательно, отношение объемов то же, что у поверхностей, т. е. равно $2 : \pi$.

Интеграл синусверзуса послужил для Лейбница также стимулом для замечательных обобщений, а именно для разложения поверхности, вместо маленьких трапеций, на маленькие треугольники, имеющие общую вершину на кривой [1]).



Фиг. 21.

Идея Лейбница такова (фиг. 21). Допустим, что нам дан в полукруге ADB сегмент ADP. Разделим дугу AP на равные части ($DD' = ds$). Соединим все точки D и A, тогда получающийся элементарный треугольник ADD' равен произведению основания DD' на высоту AG (DG служит касательной в D и, следовательно, в пределе мыслится как продолжение DD'). Но AG равно, как легко видеть, AF, и если положить угол AOD равным φ, то $AF = r \cdot \text{sinvers}\, \varphi = r - r\cos\varphi$.

[1]) ke, стр. 35.

Следовательно,

$$\triangle ADD' = \frac{1}{2} r \operatorname{sinvers} \varphi \, d(r\varphi),$$

и, значит,

$$\text{сегмент } ADP = \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\varphi} \operatorname{sinvers} \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi),$$

откуда, при $\varphi = \pi$, тотчас же получается площадь полукруга:

$$\frac{1}{2} r^2 \pi.$$

Каким путем шел Лейбниц далее и как он в конце концов выразил площадь круга через бесконечный ряд — об этом рассказывается в № XVIII.

В заключение заметим, что общая теорема, которую Паскаль выразил в выпущенных мною теоремах II, III, IV словами *„et ainsi à l'infiny"*, на языке современной математики гласит:

$$\int_0^{\varphi} \cos^n \varphi d\varphi = \int_0^{\varphi} \cos^{n-1} \varphi d(\sin \varphi) = \int_0^{\sin \varphi} (\sqrt{1 - x^2})^{n-1} \, dx. \qquad (4)$$

Доказательство, как это видно уже из преобразований, осуществляется при помощи метода, который мы теперь назвали бы „способом подстановки". Совершенно простым примером для подтверждения справедливости этого выражения может служить $n = 3$ [при $n = 1$ получается формула (2)].

XV

Диференцирование и интегрирование как взаимнообратные действия

Из „Lectiones Geometricae; In quibus (praesertim) Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur". Auctore Isaaco Barrow... Londini,... MDCLXX.

Предварительное замечание. Как нам уже хорошо известно, исчисление бесконечно-малых началось — в противоположность его изложению в новое время[1]) — с интегрального исчисления, именно с определенного интеграла. Так как, начиная

[1]) Впрочем, в самое последнее время наблюдается кое-где обратное течение.

с древности и до XVII в., вся математика бесконечно-малых была связана с геометрией (или же через посредство геометрии с механикой), то понятие неопределенного интеграла встречалось лишь постольку, поскольку иногда можно было брать пределы интеграла произвольными. В действительности же понятие неопределенного интеграла выступило на сцену только тогда, когда геометрические рассуждения были облачены в алгебраический вид. Заслуга этого переоблачения, а вместе с тем и открытия „исчисления" бесконечно-малых принадлежит Г. В. Лейбницу и Исааку Ньютону. Так же как Паскаль является подлинным предшественником Лейбница (см. выше № XIV), так же — и в еще большей степени — Барроу (Barrow) был предшественником Ньютона. Но у Барроу все основные теоремы носят еще чисто геометрический характер, хотя он иногда и применяет аналитический метод Декарта (стоящие в заголовке „Symptomata" — это „уравнения" кривых линий). В геометрической форме книга Барроу — в противоположность собственному отзыву автора, называющего в предисловии свои лекции „Quisquilien" (мелочи), едва ли заслуживающими опубликования, — содержит полный курс дифференциального и интегрального исчислений для простейших функций. Дифференциальное исчисление основывается всецело на характеристическом треугольнике (см. выше, стр. 87), с которым Барроу мог познакомиться у Паскаля (см. предш. номер). Из книги Барроу, вышедшей в 1672 и 1674 гг. под новым заголовком, мы заимствуем два важнейших отрывка, в которых строго доказывается взаимнообратный характер дифференциального и интегрального исчислений. В подобной форме для случая совершенно произвольной кривой эта теорема встречается здесь впервые. Для парабол высших порядков это показал еще Торичелли (уже в 1646 г.). Но Торичелли опубликовал только случай обыкновенной параболы в „Opera geometrica" в 1644 г. (см. выше № XI) [1].

Применяемые при вычислениях символы Барроу почти все берет из „Arithmeticae in numeris et speciebus institutio, quae... totius mathematicae, quasi clavis est" В. Оутреда (W. Oughtred) (Лондон 1631, позднее часто издавалось под названием „Clavis mathematicae") [2]. Прежде всего укажем, что знаком пропорции служат вместо нашего $a:b=c:d$ такое выражение: $a.b::c.d$, затем знак $\sqsubset$ выражает собой „больше чем", знак $\sqsupset$ — „мень-

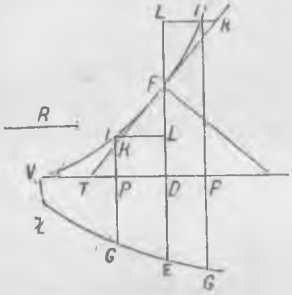
[1]) См. статью Э. Бортолотти (E. Bortolotti) в Archivio di Storia della Scienza, **6** (1925), стр. 150. Opere di E. Torricelli, ed Loria-Vassura Faenza 1919, I, 2, стр. 309—316.

[2]) Ключ к математике.

ше чем", знак $\times$ выражает собой умножение. Хотя Барроу хорошо был знаком с „Геометрией" Декарта, но и он не перенял ее индексного обозначения (см. выше, стр 84).

Стр. 78. Лекция X.

XI Допустим, что *ZGE* представляет собой какую-либо линию с осью *VD* (фиг. 22) [1]). Пусть сперва восставленные к последней перпендикуляры (*VZ*, *PG*, *DE*) (imprimis applicatae perpendiculares), начиная от первого *VZ*, возрастают каким-нибудь образом. Далее, пусть линия *VIF* будет такова, что всякий раз, когда мы проведем перпендикулярно к *VD* какую-либо прямую *EDF* (пересекающую кривые в точках *E* и *F*, а *VD* в точке *D*), прямоугольник на *DF* и какомлибо заданном (отрезке) *R* будет равен отсекаемой всякий раз части площади *VDEZ*. Кроме того, пусть будет *DE*. *DF*::*R*.*DT*. Тогда, если провести прямую *TF*, то она будет касательной к кривой *VIF*.



Фиг. 22.

Действительно, если на линии *VIF* взять какую-либо точку *I* (и притом сперва слева от точки *F* по направлению к начальной точке *V*) и провести через нее прямые — *IG*, параллельную *VZ*, и *KI*, параллельную *VD* (которые, как видно, могут пересекать данные линии), то получится, что

$$LF.LK::(DF.DT)::DE.R,$$

или же $LF \times R = LK \times DE$. Но (в соответствии с условленными свойствами этих линий) $LF \times R$ равно площади *PDEG*. Следовательно, $LK \times DE = PDEG \square DP \times DE$. Из этого вытекает, что $LK \square DP$ или $LK \square LI$.

Теперь возьмем какую-либо точку *I* справа от точки *F*, а все остальное проделаем, как выше. Тогда путем совершенно аналогичных рассуждений можно будет вывести, что $LK \times DE = PDEG \square DP \times DE$ и, следовательно, что $LK \square DP$ или же чем *LI*. Из этого же тотчас следует, что вся прямая *TKFK* находится внутри (или же во-вне) кривой *VIFI*.

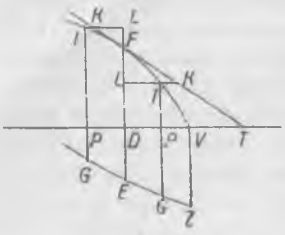
Если все останется, как раньше, но ординаты (ordinatae) *VZ*, *PG*, *DE* и т. д. будут непрерывно уменьшаться (фиг. 23),

[1]) На этом и следующем чертежах исправлены мелкие погрешности оригинала.

то подобными же умозаключениями мы придем к тем же самым выводам. Единственное различие будет состоять в том, что (в противоположность предшествующему) линия VIF будет обращена к оси VD своей вогнутостью.

Следствие. Заметим, что $DE \times DT$ равно площади $VDEZ$.

Пояснительные замечания. Текст Барроу настолько ясен, что вряд ли он нуждается в каких-нибудь пояснениях. Разумеется, следует представлять себе, что DP слева и справа берется чрезвычайно малым. Тогда KLF (в пределе совпадающий с ILF) следует рассматривать как характеристический треугольник, и проблема касательной сводится к определению отношения малых приращений $FL:KL$ при переходе к пределу. Это, начиная с 81-й стр., Барроу и проделывает алгебраическим путем на ряде примеров. Касательная будет определена, если найти ординату FD подкасательной DT. Положим, что $VD = x$, $DE = z$, $DF = y$, $R = 1$, и пусть уравнение кривой ZGE будет $z = f(x)$, тогда всегда будет:



Фиг. 23.

$$\text{пл. } VDEZ = \int_0^x z\,dx = y \cdot 1 = y.$$

Такова предпосылка. При этом $DP (= LI \approx LK) = dx$; $FL = dy$. Из этого затем следует, что $z\,dx = dy$ (т. е $FL \times R \approx$ пл. $PDEG$). Кроме того, $DT \cdot z = y$, и, следовательно, подкасательная

$$DT = y : \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом при помощи интегрирования нижней кривой производится дифференцирование верхней. Если отбросить геометрическую оболочку, то попросту из уравнения $y = \int_0^x z\,dx$ будет следовать уравнение $\frac{dy}{dx} = z$. Это и есть привычная для нас зависимость между дифференцированием и интегрированием. Но Барроу не удовлетворяется этим и несколько далее доказывает ту же теорему в обратной последовательности.

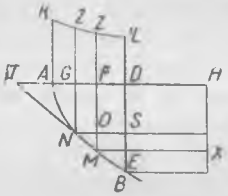
XIX. Далее, допустим, что AMB представляет собой какую-либо кривую с осью AD (фиг. 24) и что BD перпендикулярна к последней; кроме того, пусть линия KZL будет такова, что если взять на кривой AB какую-нибудь точку M и провести через нее прямую MT, касающуюся кривой AB, и затем провести прямую MFZ параллельно DB (которая пересекает линию KL в Z, а прямую DA в F) и взять некоторую линию R, то $TF.FM::R.FZ$. Тогда площадь $ADLK$ равна прямоугольнику на R и DB.

Действительно, допустим, что $DH=R$, и построим прямоугольник $BDHI$. Затем возьмем на кривой AB неограниченно (indefinitè) малый отрезочек MN и проведем NG параллельно BD и MEX и NOS параллельно AD.

Тогда

$$NO.MO::TF.FM::R.FZ,$$

или же $NO\times FZ=MO\times R$, т. е. $FG\times FZ=ES\times EX$. Но так как все прямоугольники $FG\times FZ$ отличаются от площади $ADLK$ сколь угодно мало (minimè) и все соответствующие прямоугольники $ES\times EX$ образуют прямоугольник $DHIB$, то утверждение является достаточно ясным.



Фиг. 24.

Пояснительные замечания. Здесь мне приходится сказать еще меньше, чем выше. Характеристический треугольник выступает еще более отчетливо. Для кривой AMB сказано, что $\frac{dy}{dx}=\frac{v}{TF}$, а для кривой KZL всегда

$$ZF=z=\frac{dy}{dx}.$$

Из этого следует, что $\int_0^x z\,dx=y$. Это в точности то же самое, что и выше. При этом выводе видно еще отчетливее, чем в первом случае, что речь идет о выводе, исходящем из определенного интеграла. Но это обстоятельство весьма затрудняло тогда дело. Если пользоваться, как это делаем мы, определением неопределенного интеграла как результата обращения дифференцирования, то теорема становится самоочевидной

XVI.

Первые напечатанные правила диференцирования.

Из статьи Лейбница „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.“. Acta eruditorum anno MDCLXXXIV publicata. Lipsiae. Anno MDCLXXXIV. Стр. 467—473. — Перепечатано в „Leibnizens mathematische Schriften“, изд. C. I Gerhardt, I Abth., Bd. IV (= Leibnizens Ges. Werke, изд. G. H. Pertz, 3. Folge; Mathematik, 4 т.), Halle 1859, стр. 220—226. Нем. пер. Гергарда Ковалевского (Gerhard Kowalewski) в собрании классиков Оствальда, № 162, Leipzig 1908, стр. 3—11.

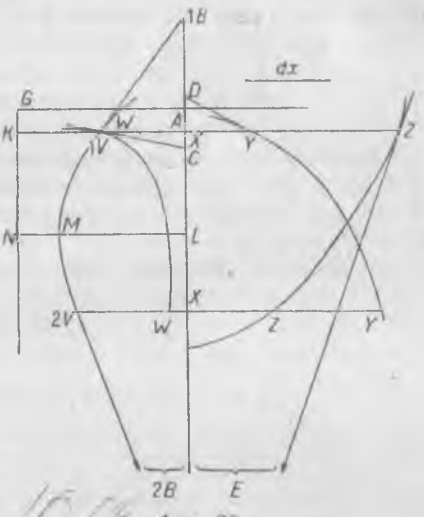
Предварительное замечание. Когда Лейбниц весной 1673 г. получил в Париже в подарок от Гюйгенса вышедшее только что сочинение последнего о часах с маятником „Horologium oscillatorium“ (Parisiis 1673 г.), в котором содержались также важные открытия в области инфинитезимальной геометрии, он впервые заметил, как мало он знает математику, которой до тех пор занимался лишь случайно и урывками. Гюйгенс порекомендовал ему ряд подходящих книг, и в частности сочинения Паскаля (см. выше № XIV). Лейбниц тогда впервые прошгудировал „Геометрию“ Декарта (см. стр. 84) и глубже познакомился с геометрией неделимых Кавальери (см. стр. 61 и сл.). Он многому также научился из сочинений Валлиса (Wallis)[1]). В октябре — ноябре 1675 г. он открыл, по крайней мере в основных чертах, употребительный ныне метод диференциального и интегрального исчислений (включительно с их обозначениями).

Позднее он также познакомился с работами англичан Дж. Грегори (Gregory), И. Барроу, а также с кое-какими трудами Ньютона. В этих работах он встретил некоторые из своих собственных открытий.

На этом фундаменте он строил далее в той мере, в какой ему это позволяли его многообразные дипломатические занятия. В беседах, в особенности с Чирнгаузеном, некоторые из его открытий стали проникать наружу, и, для того чтобы гарантировать себя от любителей попользоваться чужим добром, Лейбниц в 1684 г. решился на первых порах опубликовать в третьем сборнике недавно основанного журнала ученых „Acta Eruditorum“ статью о своем диференциальном исчислении („Новый метод нахождения наибольших и наименьших значений и определения касательных, не изменяющий в случае дробных или иррациональных величин, и специальный способ вычисления к нему“). Впрочем,

[1]) Особенно из „Arithmetica Infinitorum“ (Oxonii 1656).

эта статья так сжата [1]) и с самого начала так изобилует ошибками (не только типографскими, но и серьезными ошибками, допущенными по недосмотру самим Лейбницем), что не вполне посвященный вряд ли мог в ней что-нибудь понять. Статья вовсе не вызвала того интереса, какого она заслуживала, и в течение долгого времени почти не обращала на себя внимания. Основным в ней было то, что, как уже указывается в заголовке, Лейбниц при помощи своего метода мог сразу диференцировать дроби и корни и что его метод можно было приложить даже и к трансцендентным функциям. Последнее было особенно развито в дополнительной статье [2]) „De geometria recondita et analisi indivisibilium atque infinitorum" („О более глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных величин"), выпущенной Лейбницем в 1686 г. в тех же „Acta Eruditorum" [3]) Для (алгебраических) кривых, выражающихся целыми рациональными функциями $f(x, y) = 0$, умели находить высшие и низшие точки, равно как и касательные, еще со времени Ферма и Декарта (см. № XIII).



Фиг. 25.

Стр. 467. Допустим, что нам даны ось AX и ряд кривых VV, WW, YY, ZZ (фиг. 25) и их перпендикуляр ые к оси ординаты (ordinatae) VX, WX, YX, ZX, которые мы обозначим соответственно v, w, y, z; отсекаемый на оси отрезок (abscissa ab axe) мы назовем x. Пусть VB, WC, YD, ZE будут касательные, пере-

[1]) Эта сжатость была не без умысла. В наследии Лейбница сохранились, по меньшей мере, два наброска, которые были бы много понятнее. Один из них перепечатан К. И. Гергардтом в его книге „Historia et Origo Calculi Differentialis a. G. G. Leibnitio conscripta", Hannover 1846.

[2]) Acta erud., стр. 292—300. „Math. Schriften II, 1 (= 5 т.), стр 226 — 233. Не имеется у Ковалевского.

[3]) Здесь он вводит (правда, лишь намеками) интегральное исчисление как обращение диференциального исчисления, к чему он пришел из других соображений, чем Барроу; его „характеристический треугольник" также был опубликован впервые в этой статье.

секающие ось в точках B, C, D, E. Обозначим произвольно взятую прямую (отрезок) через dx, а другой отрезок, относящийся к dx так, как v (или w, или y, или z) относится к XB (или XC, или XD, или XE) [1]), мы назовем через dv (или dw, или dy, или dz) или же разностью (differentia) v (или w, или y, или z). При этих условиях правила исчисления (calculi) будут следующими.

Если a представляет собой заданную постоянную величину, то da равно 0 и dax равно adx. Если y равен v (или же каждая ордината кривой YY равна соответствующей ординате кривой VV), то dy рав. dv [2]). Далее, идут *сложение и вычитание:* если $z - y + w + x$ рав. v, то $dz - y + w + x$, или dv рав. $dz - dy + dw + dx$. *Умножение*, dxv рав. $x\,dv + v\,dx$ или же, если положить y рав. xv, то dy рав. $x\,dv + v\,dx$. Можно по произволу пользоваться либо формулой с xv или же для краткости с одной буквой, как, например, y. Заметим, что в этом исчислении с x и dx обращаются так же, как с y и dy или же с какой-либо иной неопределенной буквой и ее диференциалом (cum sua differentiali)... Далее идет *деление*, $d\frac{v}{y}$ или же (если положить z рав. $\frac{v}{y}$) dz рав.

$$\frac{\mp v\,dy \mp y\,dv}{yy}$$ [3])

. . . Стр. 469. *Степени* (Potentiae): $dx^a = ax^{a-1}\,dx$, например $dx^3 = 3x^2dx$; $d\frac{1}{x^a} = \frac{-a\,dx}{x^{a+1}}$, например, если $w = \frac{1}{x^3}$,

то $dw = \frac{-3dx}{x^4}$.

---

[1]) Здесь в оригинале стоит WB (или WC, или YD, или ZE)!! Эти ошибки исправлены уже у Гергардта. Однако Герг. рдт не в олне правильно передал индексные обозначения чертежа, восходящие к декартовой „Геометрии“ (1637).

[2]) Я не имею намерения следовать за удручающим типографским набором оригинала, но, не повторяя ошибок его, я вместе с тем во всех дегалях строго держусь его. Замечу, например, что хотя Лейбниц в дальнейшем часто пользовался знаком равенства, в данном тексте он еще охотно пишет на старый манер „aequalls“ и „aequ.“.

[3]) Двойственность знаков объясняется у Лейбница тем, что у него не существует на оси x-ов положительного направления, или же, как можно еще сказать, тем, что он все подкасательные, будут ли они направлены вверх или вниз, считает положительными. Поэтому он в дальнейшем вынужден более подробно разобрать вопрос о знаках.

Корни: $d\,\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,dx\,\sqrt[b]{x^{a-b}}$ (отсюда $d^2\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, ибо в этом случае a [равно] 1 и b [равно] 2, а значит, $\frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$ равно $\frac{dy}{2\sqrt[2]{y^{-1}}}$; но y^{-1} то же самое, как это следует из природы показателей геометрической прогрессии, что и $\frac{1}{y}$, а $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ равен $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$). $d\,\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-a\,dx}{b\sqrt[b]{x^{a-b}}}$ [1].

Впрочем, достаточно одного правила для целочисленных степеней, чтобы определить как дроби, так и корни. Ибо степень бывает дробью, если показатель степени отрицательный, и она обращается в корень, если показатель степени дробный... [2].

Если научиться, если можно так выразиться, *алгорифму* этого исчисления, которое я называю *дифференциальным* [3], то все прочие диференциальные уравнения (aequationes differentiales) могут быть решены при помощи общего способа, и можно будет находить максимумы и минимумы, так же как и касательные, не избавляясь от дробей или иррациональностей или других выражений (alia vincula) [4], как это приходилось делать, пользуясь известными доныне методами [5].

Доказательство всего этого будет легко для знакомого с этими вещами, если он только примет во внимание то недостаточно еще оцененное обстоятельство, что dx, dy, dv,

[1] В оригинале это выражение совершенно неверно. Несколько мелких ошибок оригинала у нас здесь просто исправлены. Но в то время эти ошибки должны были повлечь за собой непонимание текста.

[2] Лейбниц и далее подчеркивает всю важность этой общей концепции степени, которая хотя и не была тогда вполне новой (также и в системе записи), но все же для большинства являлась совершенно чуждой и непривычной.

[3] Таким образом „Calculus differentialis" — это диференциальное исчисление. Обратное исчисление Лейбниц в полном соответствии с его происхождением первоначально называл „calculus summatorius", но, после того как братья Бернулли ввели в 1691 г. слово „integrale" (целое, представляемое как бы составленным из частей), он после недолгих переговоров сам стал пользоваться этим выражением.

[4] Vinculum, собственно говоря, называется черта знака извлечения корня, которую Декарт ввел для объединения подкоренных количеств. Здесь Лейбниц подразумевает выражения, стоящие в скобках. Это и есть другие „Vincula". Он даже употребляет вместо скобок черту ради ала. У Ковалевского на стр. 6, строка 6 снизу, и на стр. 8, строка 7 снизу, перевод совершенно невозможный.

[5] В силу отсутствия каких-либо публикаций Лейбниц не мог еще знать того, что Ньютон уже давно достиг тех же результатов.

dw, *dz* следует считать соответственно пропорциональными разностям или же мгновенным приращениям или уменьшениям [Incrementa и Decrementa] *x*, *y*, *v*, *w*, *z*. Поэтому для каждого данного равенства можно написать (соответствующее) дифференциальное равенство...

(470)... Очевидно, что наш метод распространяется и притом самым общим образом также и на трансцендентные линии, которые не сводятся к алгебраическим уравнениям (Calculum algebraicum) или же не имеют никакой определенной степени ..., если только всегда твердо придерживаться того, что найти *касательную* — это значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же [провести] продолженную сторону бесконечно-угольного многоугольника, который для нас равнозначащ данной кривой.

Пояснительные замечания. Мы видим здесь, что *dx*, „разность", или же „дифференциал" абсциссы, равно некоторому данному конечному отрезку; точно так же и *dy* и другие дифференциалы суть конечные отрезки. *dx* представляет собой не что иное, как „единицу" Паскаля (см. выше, стр. 87), которую нужно мыслить произвольно малой. Впрочем, Лейбниц, подобно Архимеду, ничего не говорит об этом (см. выше, стр. 23). Суть дела заключается в том, что определенные, таким образом, дифференциалы принимаются пропорциональными „мгновенным приращениям", возникающим при переходе от одной точки кривой к „бесконечно близкой соседней". Позднее Лейбниц и его последователи стали обозначать через *dx*, *dy* и т. д. самые эти приращения. Это вызвало уже тогда, а затем и позднее, ряд не всегда справедливых упреков по их адресу. Действительно, то, о чем думал Лейбниц (а также и, в другой форме, Ньютон; см. ниже № XVII), есть то же самое, о чем думаем мы, совершая переход к пределу. Нужно было только найти более точный способ для выражения этого нового по сравнению с концепциями древних представления и, кроме того, нужно было сперва привыкнуть к правомерности перехода к пределу. Мы видели, что уже Ферма сознательно отбросил косвенные доказательства древних, как нечто, что можно было бы всегда присоединить, и Лейбниц, каким бы философским спекуляциям он ни предавался в своем учении о монадах всегда помнил, что он является продолжателем идей Архимеда.

Как на один из важных моментов своего открытия Лейбниц в одном выпущенном здесь отрывке указывает на введение

величины dy. Предшественники его при определении касательных рассматривали всегда только подкасательные (здесь, например, DX), а не дифференциал dy, представляющий собой четвертую пропорциональную к DX, y, dx. Действительно, $DX : y = dx : dy$, или же $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{DX}$ (см. выше, стр. 92). Это был второй важный результат, полученный Лейбницем из „характеристического треугольника“ (первый — см. выше, стр. 88). В приведенном выше изложении это не выражено явным образом, ибо производные еще отсутствуют и характеристический треугольник совершенно не изображен на чертеже.

XVII

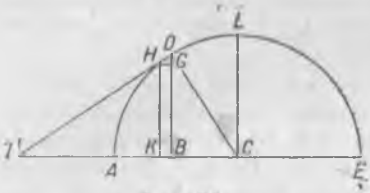
Бесконечные ряды для арксинуса, синуса и косинуса

Из трактата Исаака Ньютона „De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas“. Впервые отпечатано в виде книжки и д названием „Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis. Londini: Ex Officina Pearsoniana Anno MDCCXI“, стр. 1—21. Издателем этого сборника работ и писем Ньютона был, как это следует из подписи под предисловием, В. Джонс (Jones). Существует второе издание этой книги, вышедшее в 1723 г. в Амстердаме. Более доступен этот трактат в „Isaaci Newtoni equitis aurati, Opuscula mathematica, philosophica et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit Joh Castillioneus jurisconsultus“. Tomus primus. Continens Mathematica... Lausannae et Genevae... MDCCXLIV, стр. 1—28. Английский перевод сделан Джон Стюартом (Stewart), Лондон 1745 г.

Предварительное замечание. Этот „Анализ посредством уравнений, число членов которых бесконечно“ представляет собой первое сочинение Ньютона по исчислению бесконечно-малых. Оно было написано около 1666 г. Но (подобно всем чисто математическим сочинениям Ньютона) издано оно было значительно позднее его составления Правда, это сочинение было уже в 1669 г. передано на хранение к Коллинсу (Collins), у которого его можно видеть, а в 1685 г. Валлис включил основное его содержание в свою изданную на английском языке „Алгебру“ (по-лат. в „Opera“, том II, Оксфорд 1693 г. в гл. 95).

В этом первом своем труде, содержащем все зародыши позднейших работ, Ньютон выявляет себя, с одной стороны, как ученика Барроу (см. № XV), с другой же стороны, книга свидетельствует о том, что он многому научился из „Arithmetica infinitorum“ (Oxonii 1656) Валлиса. Но он оставляет обоих этих ученых далеко позади себя. Если Барроу был еще чистым геометром, случайно лишь пользовавшимся декартовыми формами уравнений, то Валлис (по крайней мере, в 1656 г.) был еще

чистым арифметиком, нашедшим большое число пределов (интегралов) посредством искусных числовых интерполяций. В противоположность им обоим Ньютон является, в первую очередь, алгебраистом. Поэтому его результаты с самого же начала обладают максимальной общностью. Теорема об обращении (см. № XV), у Барроу представлявшая собой изолированную теорему, превращается у Ньютона в метод, а интерполяторская находчивость Валлиса приводит его к применению деления и извлечения корней к таким выражениям, для которых эти действия невозможны без остатка, в результате чего и возникли „уравнения с бесконечным числом членов“, или же, к к мы выражаемся, „бесконечные ряды“. Эти ряды как функции x он приравнивал y (или z), так что они представляли для него кривые. Площади этих кривых он определял путем почленного интегрирования рядов. Впервые этот метод был опубликован в „Logarithmotechnia“ (Лондон 1668 г.) Ник. Меркатором (Mercator), у которого он, однако, встречается в значительно более несовершенном виде и притом лишь в применении к одному примеру, он применен также в одном примере из трактата лорда Броункера (Brouncker), напечатанного в „Philosophical Transactions of the Royal Society of London“. Однако и этот метод и замечательные приложения его Ньютоном произвели столь же незначительное впечатление, как и диференциальное исчисление Лейбница (см. выше, стр. 95). Для Лейбница, который узнал о нем в 1676 г. из писем к нему и мог познакомиться с работой осенью того же года, последняя, разумеется, представляла большой интерес, но он тем временем сам уже пришел к основным результатам (а также к общему способу разложения в ряды) другим путем [1].



Фиг. 26.

Стр. 19.

Определить длины кривых

Допустим (фиг. 26), что $ADLE$ представляет собой окружность, у которой требуется определить длину дуги AD.

[1] В дальнейшей передаче я, по обыкновению, придерживаюсь оригинала, но, разумеется, я не могу ручаться, что сам Ньютон в 1665 г. писал в точности так (ибо о рукописях Ньютона известно мало достоверного). Но вовсе не исключена возможность, что дело как раз так и обстояло. Сказанное относится также к совершенно общим отрицательным и дробным буквенным показателям, встречающимся в других частях трактата (см. выше, стр. 97, примечание 2).

Если провести касательную DHT и построить неограниченно (indefinité) малый прямоугольник $HGBK$ и положить $AE=1=2AC$, то, так же как BK или GH, момент (momentum) основания AB (x), относится к HD, моменту дуги AD, так

$$::BT:DT::BD(\sqrt{x-xx}):DC(1/2)::1(BK):\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}(DH).$$

Поэтому $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ или же $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$, представляет собой момент дуги AD. В приведенном виде [1] это даст:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}+\frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}\text{ и т. д.}$$

Поэтому, согласно второму правилу [2], длина дуги AD равна:

$$x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}\text{ и т. д.,}$$

или же $x^{\frac{1}{2}}$, умноженному на $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+$ $+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5$ и т. д.

Таким же образом можно найти, приняв CB равным x, а радиус CA положив равным 1, что дуга LD равна $x+\frac{1}{6}x^3+$ $+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$ и т. д.

Следует при этом заметить, что единица, принятая за момент, представляет собой поверхность, когда речь идет о теле, линию, когда о поверхности, и точку, когда о линии (как в этом примере).

Я не боюсь говорить о точечной единице (de unitate in punctis), т. е. о бесконечно (infinite) малой линии, ибо геометры, еще при употреблении метода неделимых, имели в виду лишь (геометрические) отношения [3].

Из этого можно извлечь следствия, относящиеся к поверхностям и объемам тел, а также к центрам тяжести.

---

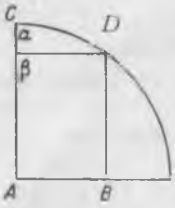
[1] Т. е. если извлечь квадратный корень и затем разделить на $2x-xx$.

[2] Т. е. интегрируя почленно.

[3] Это, очевидно, представляет собой ссылку на Эвклида, V, определение 4 (см. выше, стр. 8).

. . . . . .

Нахождение основания по данной длине кривой



Фиг. 27.

Если (фиг. 27) требуется найти по данной дуге αD синус AB, то из вышенайденного уравнения $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$ и т. д. (где положено $AB = x$, $\alpha D = z$ и $A\alpha = 1$) путем извлечения корня [1] получится $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362\,880}z^9$ и т. д.

Кроме того, если требуется найти по той же данной дуге косинус $A\beta$, то нужно взять $A\beta \left(= \sqrt{1 - xx} \right) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40\,320}z^8 - \frac{1}{3\,628\,800}z^{10}$ и т. д.

Пояснительные замечания. В этих двух связанных между собой небольших отрывках заключается столь многое из исчисления бесконечно-малых, что я, дабы не занять слишком много места, должен ограничиться очень краткими замечаниями. Прежде всего, я не имею места для произведения тех выкладок, которые и Ньютон предоставляет сделать читателю. Мы видим, что он (так же, между прочим, как и Лейбниц) немедленно понял, что интегрирование дает не только площади (квадратуры), но — совершенно общим образом — и длины кривых (спрямление), для которых он приводит только что рассмотренный пример, и поверхности тел (компланацию), и всякого рода центры тяжести. Это видно из последнего замечания первого отрывка. В основном Ньютон исходит из того же „характеристического треугольника“, который мы встретили у Паскаля и который вновь попался нам у Барроу (см. выше № XIV). Он дополняет чертеж (по существу, без необходимости) подкасательной, встречающейся у Барроу.

Моментом (momentum) Ньютон называет то, что Лейбниц назвал дифференциалом (см. выше, стр. 98), и он определенно и „без боязни“ говорит, что этот момент представляет собой бесконечно малый отрезок или же „точку“. Таким образом мы оказываемся снова в центре трудной проблемы „линий-атомов“

[1] Это здесь означает „решение уравнения“ относительно x, при данном z.

(см. № IV), и Ньютон стоит здесь на точке зрения Ксенократа. Разумеется, это тотчас же открыло уязвимые пункты для нападок со стороны философов. После того как Ньютон увидел, что дифференциалы Лейбница подверглись подобным нападкам, он стал осторожнее и в трактате „О квадратуре кривых", напечатанном впервые в 1704 г. в качестве приложения к „Оптике", он начинает прямо с объяснения, что он рассматривает математические величины не как составленные из крайне малых частей, а как порождаемые непрерывным движением. Однако, по существу, и у Ньютона речь идет, как мы это уже подчеркивали при разборе Лейбница, не о чем ином, как о переходе к пределу, для которого только не была еще найдена логически безупречная форма. Ньютон, как это первоначально делал и Лейбниц, принимал момент равным 1 до тех пор, пока не заметил недостатка этого способа

Если записать весь вывод в современных обозначениях, то, положив дугу BD равным y, имеем $HG = dx$, $GD = dy$, $HD = ds$, а уравнение окружности, если начало координат находится в A, будет $y^2 = x - x^2$. Тогда

$$ds : dx = \frac{1}{2} : y,$$

и, следовательно:

$$ds = \frac{dx}{2\sqrt{x - x^2}} = dx\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \dots\right), \qquad (1)$$

$$\text{arc } AD = s = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \dots\right). \qquad (2)$$

Если же взять начало координат в C, так что $CB = x$ и $CD = 1$ (все это см. на фиг. 26), то уравнение окружности будет $y^2 = 1 - x^2$ и

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots, \qquad (3)$$

$$\text{и дуга } LD = s = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots \qquad (4)$$

Это легко привести в соответствие с обозначениями на фиг. 27.

За этим следует так называемое „обращение ряда“. Ньютон обрывает ряд и, например, берет:

$$s = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 . \qquad (5)$$

Отсюда он определяет x при помощи названного по его имени способа приближенного вычисления корней (см. I выпуск, № XXII), который также изложен в рассматриваемой работе. Он приводит также пример обращения ряда, но только один и притом очень кратко. В нашем случае следовало бы поступить так. Положим в (5):

$$x = s + p.$$

Тогда мы получим:

$$0 = p + \frac{1}{6}(s^3 + 3s^2p + \ldots) + (s^5 + \ldots) . \qquad (6)$$

Если представить себе, что (5) разложено в ряд для очень малого x, то и s, а значит, и p, также будут очень малы. Тогда в уравнении (6) следует взять только члены, содержащие низшие степени s и p, пренебрегая членами с высшими степенями. Однако в этом случае узнать, каковы именно эти члены, отнюдь не так просто, как в случае уравнений с постоянными коэфициентами. Ньютон здесь не рассматривает ближе этого трудного вопроса, он это делает только в письме от 1676 г. и в позднейших сочинениях. Это как раз тот метод, который привел к так называемому „параллелограму Ньютона“. Я не могу сейчас заняться им подробнее [1] и коротко замечу лишь следующее. Так как p следует положить равным некоторой степени s, то сперва пробуют $p = As^2$. Но это дает $A = 0$. Затем берут $p = Bs^3$. Тогда двумя низшими членами уравнения (6) будут p и $\frac{1}{6}s^3$ (все остальные имеют высшие степени s), и мы получаем $B + \frac{1}{6} = 0$ или $B = -\frac{1}{6}$, т. е.

$$p = -\frac{1}{6}s^3 ,$$

$$x = s - \frac{1}{6}s^3 .$$

---

[1] См. работу автора „Algebraische Kurven“ I т. (Samml. Göschen, № 435), Berlin 1914, стр. 104 и сл.

Далее, положим:

$$p = -\frac{1}{6}s^3 + q,$$

что дает для уравнения (6):

$$0 = q + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}s^5 + \ldots\right) + \frac{3}{40}(s^5 + \ldots); \tag{7}$$

все отброшенные члены имеют высшие степени.

Поэтому нужно взять:

$$q = \frac{1}{12}s^5 - \frac{3}{40}s^5 = \frac{1}{120}s^5. \tag{8}$$

В результате получается ряд

$$x = s - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{120}s^5 - \ldots \tag{9}$$

Если желательно пойти еще дальше, то в (5) нужно присоединить еще член, содержащий x^7, затем подставить его в продолженное уравнение (7); в результате мы получим в (9) еще один член. Ньютон, благодаря остроумным комбинациям, мог также получить сразу несколько членов. В каждом отдельном случае легко заметить, насколько далеко нужно итти, для того чтобы обращение было верно с точностью до какого-либо члена. Общего правила здесь не имеется.

Однако Ньютон сам заметил, что коэфициенты следуют некоторому определенному закону (что, разумеется, представляет собой неполную индукцию), и мы, действительно, получаем ряды:

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \tag{10}$$

и

$$\sin x = x - \frac{1}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5 - \ldots \tag{11}$$

Далее, Ньютон возводит ряд (11) в квадрат, вычитает результат из 1 и затем извлекает квадратный корень. Мы вместе с Ньютоном предоставим произвести соответствующие выкладки читателю. В результате получается ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1\cdot2}x^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4 - \ldots \tag{12}$$

Мы теперь, правда, знаем, что производить подобные действия (умножение, деление, извлечение корня, почленное интегрирование) без всяких околичностей над бесконечными рядами нельзя. Но для степенных рядов, о которых здесь идет речь, и поскольку $|x|$ достаточно мало, все это справедливо. Вряд ли можно требовать от Ньютона, вступившего в совершенно новую область, чтобы он мог сразу точно обозреть все представляющиеся возможности. Однако Ньютон ни в коем случае не был непредусмотрительным. В каждом отдельном случае он знал, что сумеет в любое время доказать, что вычисление справедливо с точностью до такого-то и такого-то члена. В конце трактата он даже доказывает, что ряды, полученные им путем решения уравнений (или обращения рядов), как мы бы сказали коротко, „сходятся", т. е. что, как он выражается сам, „чем далее будут они продолжены, тем ближе они при достаточно малом x приближаются к истине, так что разность (p, q, r и т. д.) в конце концов становится меньшей сколь угодно малой величины (tandem evadat minor quavis data quantitate)". Это доказательство он основывает на теореме Эвклида X, 1, т. е. на аксиоме Архимеда (см. выше № 1). Ньютон не пытался, однако, в отдельных случаях на деле установить области сходимости.

XVIII

„Арифметическая квадратура" круга

Из одного недатированного и не снабженного адресом (французского письма Г. В. Лейбница. Письмо это, вероятно, было отправлено аббату Галлуа (Gallois) и написано в конце 1673 г. или начале 1674 г. Оно было предназначено к опубликованию в „Journal des Sçavans", издание которого, однако, прекратилось. Вследствие этого оно было впервые опубликовано по рукописи К. И. Гергардтом См. „Leibnizens Gesammelte Werke", hgg. von G. H. Pertz, 3. Folge, Mathematik, 5 т. (= „Leibnizens Math. Schriften, hgg. von C. I. Gerhardt", 2. Abth., т. I, Halle 1858, стр. 83—92).

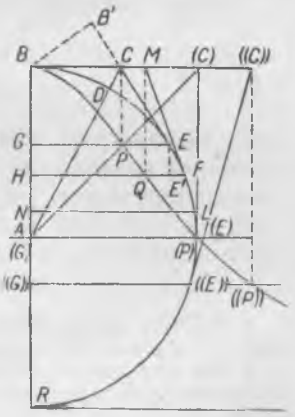
Предварительное замечание. Под „арифметической квадратурой" кривой Лейбниц подразумевал определение площади посредством рациональных чисел, что, разумеется, оказалось возможным уже для круга только при посредстве бесконечных рядов. Лейбниц сам рассказывает, каким образом он пришел к идее разложения в ряд. Он, вообще, всегда стремился (в противоположность многим ученым всех времен) ясно изложить генезис своих идей. Как видно из дальнейшего, основные мысли были им установлены уже в 1673 г., но вместе с ростом его математических познаний работа разрасталась, и приготовленная

в 1675 г. к печати рукопись (оригинал которой, повидимому, пропал) не увидела света, ибо вскоре она оказалась устаревшей. Существует, однако, целый ряд более коротких изложений, частью тогда же опубликованных, частью же впервые опубликованных по бумагам Лейбница Гергардтом (там же, стр. 88—132). Лейбниц применил свой метод ко всем коническим сечениям, а также и к другим кривым, и поверхностям. Нижеследующий отрывок представляется нам наиболее подходящим для наших целей.

Стр. 88... Арифметическая квадратура круга и ее частей может быть сформулирована в виде следующей теоремы. Если принять радиус круга за единицу и BC, тангенс (la tangente) BD половины дуги BDE (фиг. 28), положить равным b, то величина дуги равна $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ и т. д. Если же дуга определена, то легко вычислить площади; дополнение к этой теореме гласит, что если принять диаметр и его квадрат равными 1, то площадь круга равна

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ и т. д.}$$

Стр. 89... Для этого я воспользовался следующей вспомогательной теоремой Если провести через вершины треугольника BEF три параллели BC, GE, HF и продолжить одну из сторон EF до пересечения с одной из параллелей в точке C, то прямоугольник, построенный на BC, отрезке, расположенном между точкой пересечения C и вершиной B, через которую проходит эта параллель, и на GH, расстоянии между двумя другими параллелями (90) GE и HF, т. е. прямоугольник PGH (если BGH перпендикулярно к BC, а CP равно и параллельно BG), будет вдвое больше треугольника BEF. Точно так же, если HQ равно BM, то прямоугольник QHN равен удвоенному треугольнику BFL. Если эти основания EF, FL и т. д. бесконечно малы так что они [вместе с расположенными над ними треугольниками EBF, FBL] заполняют всю площадь $EB((E))LFE$ до кривой $EFL((E))$ и если также GH



Фиг. 28.

и HN и т. д. бесконечно малы, так что прямоугольники PGH и QHN и т. д. заполняют всю площадь $PG((G))((P))QP$ до кривой $PQ((P))$, то вся эта [последняя] площадь вдвое больше другой площади. И так как FEC, LFM, $((E))((C))$ суть касательные к первой кривой, то теорему в общем виде можно высказать так: ... [после установления общей теоремы следует сперва применение ее к параболам и гиперболам общего вида с уравнениями $x^z a^v \sqcap^{1} y^{z+v}$ и $x^z y^v \sqcap a^{z+v}$... (91), а затем применение к циклоиде].

Третьим приложением является арифметическая квадратура круга. Если кривая $E(E)((E))$ представляет собой дугу окружности, то кривая отрезков [концов отрезков на параллелях GP, HQ и т. д.], т. е. $BP(E)((P))$ в том случае, если BG или CP назвать x, а BC или GP назвать z, выразится по отношению к прямому углу RBC уравнением $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$; т. е., как это легко доказать, отношение RB к BG равно удвоенному отношению AC к BC[2].

Из этого, во-первых, следует, что тот, кто найдет правило для определения сокращенным способом суммы следующего конечного ряда (rang) рациональных чисел

$$\frac{2,1}{1+2}^{3} \text{ или } \frac{2}{3}, \frac{2,4}{1+4} \text{ или } \frac{8}{5}, \frac{2,9}{1+9} \text{ или } \frac{18}{10}, \frac{2,16}{1+16}$$

или $\frac{32}{17}$, и т. д., не складывая их одно за другим, тот найдет квадратуру круга, ибо этот ряд (progression) представляет собой ряд ординат CP фигуры $BCPB$, квадратура которой дает квадратуру круга. Но пока это еще не арифметическая квадратура. Для того чтобы получить ее, нужно будет воспользоваться прекрасным методом Николая Меркатора, согласно ко-

---

[1] Лейбниц вскоре заменил этот введенный им самим знак равенства знаком Рекорда „=".

[2] Это дополнение предназначено для приверженцев старой формы выражения через пропорции, для которых уравнения еще не были привычны.

[3] Уже давно было принято выражения вроде $2a$ писать, не обозначая специально действия умножения. Но с двумя арифметическими числами так не поступали, и поэтому Лейбниц ставит здесь запятую, которую он позднее заменил точкой. Таким образом первоначально точка служила только разделительным знаком, в качестве какового она применялась иногда и ранее.

торому, так как a равно единице и $\frac{x}{2}$ равно $\frac{z^2}{1+z^2}$, это же $\frac{x}{2}$[1] равно $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ и т. д. до бесконечности. А сумма всех $\frac{x}{2}$ равна сумме всех $z^2 - z^4$ и т. д. Но первый из всех z бесконечно мал, а последний имеет некоторую определенную длину, именно BC, которую мы назовем b; следовательно, сумма всех z^2 равна $\frac{b^3}{3}$ (92), сумма всех z^4 равна $\frac{b^5}{5}$ и т. д. (согласно квадратуре парабол), и, значит, сумма всех $\frac{x}{2}$, или же половина площади $BCPB$, или же разность половины прямоугольника CBG и кругового сегмента BEB, равна $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ и т. д. Следовательно (в результате довольно простого рассуждения [suite] из обыкновенной геометрии), половина дуги BDE равна $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ и т. д., если только положить радиус равным 1, а BC тангенс (la touchante) половины дуги обозначить через b. Что и требовалось доказать..

Пояснительные замечания. После того простого вывода рядов, с которым мы познакомились у Ньютона (см. № XVII), это столь длинное рассуждение Лейбница, вероятно, изумит читателя. Ньютон и его друзья, как, например, Дж. Грегори, скоро сумели, конечно, найти флюксию для arc tg, равную, как известно, просто $\frac{1}{1+x^2}$. При этом получался ряд

$$\frac{d(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

и путем почленного интегрирования находилось, что

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Так поступают и ныне, и немногим позднее к этому пришел и Лейбниц, в 1673 г. бывший только новичком. Если в ряде

[1] Здесь и в дальнейшем Лейбниц забыл про множитель $\frac{1}{2}$, а Гергард этого не заметил. Я внес повсюду соответствующие поправки.

для arc tg положить $x = 1$, то arc tg $x = \frac{1}{4}\pi$, и мы получим знаменитый ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Но именно потому, что Лейбниц не мог еще пойти более простой дорогой, особенно поразительно, что он добился названного результата, значение которого он хорошо понимал. Открытие Лейбница вызвало должное восхищение у Гюйгенса и даже у Ньютона, который к этому времени зашел уже значительно дальше в области исчисления бесконечно-малых. Действительно, даже английские математики не пришли к мысли положить $x = 1$, хотя ряд для arc tg и не был уже им незнаком.

Что касается собственных рассуждений Лейбница, то прежде всего у него речь идет о произвольной кривой BEF. CE нужно представлять себе как продолжение EF. Если, далее, провести $BB' \perp EC$ и $EE' \perp HF$[1], то $\triangle BB'C \infty \triangle EE'F$ и, следовательно, $BB' : BC = EE' : EF$. Значит, $BB' \cdot EF = 2 \triangle EBF = BC \cdot EE' = BC \cdot GH =$ прямоугольнику PGH.

Если, далее, $BE((E))R$ представляет собой полукруг и если положить $\angle BAE = 2\omega$, то для $AB = 1$:

$$BG = x = 1 - \cos 2\omega = 2\sin^2\omega = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}^2\omega}{1 + \operatorname{tg}^2\omega},$$

$$BC = GP = z = \operatorname{tg}\omega.$$

Следовательно, уравнение кривой $BPQ(P)((P))$ будет:

$$x = \frac{2z^2}{1 + z^2}.$$

Это — кривая третьего порядка, для которой касательная к окружности в точке R служит асимптотой, названной Дж. Лориа „Pseudoversiera“[2].

---

[1] Я дополнил чертеж необходимыми обозначениями.

[2] См. его „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven“, 2-е изд., 1 т., Leipzig 1910, стр. 82 и сл. У Гебгардта кривая начерчена не вполне верно, что я исправил. Следует обратить внимание на индексирование посредством скобок, которое Лейбниц вскоре заменил способом Декарта (см. стр. 84).

С квадратурой этой кривой квадратура круга связана в силу того, что сегмент круга $BDEB = \frac{1}{2}$ (прямоугольник $BGPC$ — площадь $BCPB$), где, если BC положить равным $b\,(= \operatorname{tg}\omega)$:

$$\text{площадь } BCPB = 2\int_0^b \frac{z^2\,dz}{1+z^2} = 2\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \dots\right).$$

Далее, прямоугольник

$$BGPC = b\,(1 - \cos 2\omega) = 2b\sin^2\omega = 2\operatorname{tg}\omega \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\omega}{1+\operatorname{tg}^2\omega} = \frac{2b^3}{1+b^2}$$

и сегмент круга $BDEB =$ сект. $BAE - \triangle BAE =$

$$= \text{дуг. } BE \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{дуг. } BE - \frac{\operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}^2\omega}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\,\text{дуг. } BE = \text{сегм. круга } BDEB + \frac{b}{1+b^2} =$$

$$= \frac{b^3}{1+b^2} + \frac{b}{1+b^2} - \frac{1}{2}\ \text{пл. } BCPB =$$

$$= \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \dots$$

При $b = 1$ дуга становится равной восьмой части окружности, и мы получаем для $\frac{\pi}{4}$ уже написанный ряд [1].

Если приведенный здесь вывод и громоздок, т. е. если Лейбниц в то время еще не настолько умело разбирался в деталях, чтобы всегда итти простейшим путем, то зато, как это показал Манке (цит. соч., стр. 57 и сл.), он уже тогда обладал основными идеями об общем способе разложения в ряд, которое ныне все еще совершенно несправедливо выставляется как открытие Тэйлора (Taylor, 1715). Совершенно упускают из вида, что ряд Тэйлора был письменно сообщен Лейбницем Иог. Бернулли в 1694 г. в форме, незначительно лишь отличающейся от современной. Однако изложение этого здесь завело бы нас слишком далеко.

[1] Для более подробного ознакомления со всем этим см. Mahnke (ср. выше, стр. 87, примечание), стр. 10–13.

XIX

Касательная к спирали Архимеда

Из „Johannis (I) Bernoulli Lectiones de calculo differentialium". Издано при содействии семейства Бернулли Естественно-научным обществом в Базеле к трехсотлетию приема Бернулли в базельское гражданство (13 мая 1622 г.), с предисловием Пауля Шафхайтлина (Schafheitlin). Отдельный оттиск из „Verh. d. Naturf. Ges. in Basel", т. XXXIV, 1922. Нем. перев. „Die Differentialrechnung von Johann Bernulli aus dem Jahre 1691/92..." von Paul Schafheitlin. Собрание классиков Оствальда № 211, Лейпциг 1924.

Предварительное замечание. Уже из заглавия этого сочинения видно, что оно вышло не при жизни автора. Иоганн Бернулли вместе со своим старшим братом Яковом был одним из первых ученых, настолько овладевших исчислением бесконечно-малых Лейбница, что они могли самостоятельно продолжать работу в этой области. Зимой 1691/92 г. Иоганн Бернулли написал первый учебник диференциального и интегрального исчисления, из которого была напечатана только часть, содержащая интегральное исчисление (и то лишь в 1742 г.). Причиной отказа от печатания первой части послужило то обстоятельство, что уже в 1696 г. в Париже был выпущен маркизом де-Лопиталем (L'Hospital) курс „Диференциального исчисления" под названием „Analyse des infiniment petits". Этот маркиз прослушал курс диференциального исчисления той же зимой у Иоганна Бернулли и в вводной части своего сочинения лишь передал в систематическом виде прослушанное им. Однако в своем предисловии Лопиталь не отметил достаточно ясно этого обстоятельства, и все разъяснилось лишь после того, как Шафхайтлин открыл в библиотеке Базельского университета и опубликовал рукопись (или же копию оригинала) Бернулли. Так как Иоганн Бернулли выставил свои претензии лишь после смерти маркиза, то ему не поверили полностью. Очевидно, Иоганн Бернулли из личных соображений опасался вызвать вражду маркиза.

Я избрал нижеследующий отрывок в силу того, что он поучителен и краток и вместе с тем заключает в себе пример употребления полярных координат, между тем как до сих пор мы пользовались только прямоугольными координатами. Это, кроме того, первый случай, когда полярные координаты встречаются в явном виде, если не говорить об Архимеде и Кеплере (см. III выпуск[1].

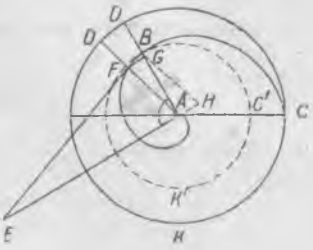
[1] Ср. мою заметку в „U.-Bl. f. Math. u. Nat.", **34**, (1928), стр. 276/77.

Стр. 15 (Нем. изд. стр. 26).

Задача XI

Найти касательную к спирали Архимеда

Спиралью Архимеда называется кривая, описываемая точкой [равномерно], движущейся по направлению от центра к окружности круга и притом находящейся все время на одном и том же радиусе, который при этом в то же самое время, в которое точка от центра достигает до окружности, равномерно производит один полный круговой оборот. Нам нужно найти касательную к этой кривой. Положим (фиг. 29), что радиус $AC = a$, окружность $DDCD = b$, $AB = x$, и проведем к линии AB перпендикуляр AE. Тогда радиус AC так относится к длине окружности, как AB к дуге CKD [1]. Следовательно, $AD \cdot AF :: DD \cdot FG$ [или же] $a \cdot x :: \frac{bdx}{a} \cdot \frac{bxdx}{aa}$. Далее, $BG \cdot FG :: AB \cdot AE$, т. е.



Фиг. 29.

$$d \cdot x \cdot \frac{bxdx}{aa} :: x \cdot \frac{bxx}{aa} = s .$$

Следовательно, если требуется провести касательную в C, то надо взять $s = b$, что Архимед доказывает путем длинных рассуждений [2].

Пояснительные замечания. Прежде всего обратим внимание на вполне уже современный, хотя и несколько непривычный, способ записи Бернулли. Во-первых, $2a\pi = b$. Далее:

$$. \ a : b = AB (= x) : \text{arc } CKD.$$

Но

$$\text{arc } CKD = 2x\pi = \frac{b}{a} x ,$$

следовательно,

$$DD = d \text{ arc } CKD = \frac{b}{a} dx .$$

[1] Я вставил букву K, отсутствующую в обоих изданиях Шафхайтлина.

[2] Archimedes, De lineis spiralibus, XVIII. Ed. J. L. Heiberg, II², Leipzig 1913, стр. 63.

Но, так как[1] $a:x=\frac{b\,dx}{a}:FG$ (ибо $AD:AF=DD:FG$), то

$$FG=\frac{bx\,dx}{a^2}.$$

Так как, далее:

$$BG:FG=AB:AE,$$

то, если положить еще полярную подкасательную $AE=s$:

$$dx:\frac{bx\,dx}{a^2}=x:s,$$

и, следовательно,

$$s=x^2\cdot\frac{b}{a^2}=2x\pi\cdot\frac{x}{a}=\text{дуге } C'K'B.$$

Как раз в последней форме определяется касательная у Архимеда (теорема XX. цит. соч., стр. 73). Отсутствующие у Бернулли линии на черт. 29 мной проведены штрихом.

Еще проще осуществляется построение при помощи поднормали AH. Этого нет ни у Бернулли, ни у Архимеда. Действительно,

$$BG:FG=AH:AB,$$

или

$$dx=\frac{bx\,dx}{a^2}=AH:x,$$

а отсюда следует, что

$$AH=\frac{a^2}{b}=\frac{a}{2\pi}=\text{const}.$$

Это постоянство полярной поднормали может служить в качестве определения спирали Архимеда.

Теперь мы запишем вывод во вполне современной форме. Если положить обе координаты

$$AB=\rho,\ \angle CKD=\vartheta\,[2],$$

---

[1] Собственно говоря, дальше должно было бы стоять $x-dx$. Но тогда в значение FG войдет еще член $(dx)^2$, которым, согласно принципам Лейбница, можно по сравнению с самим dx пренебречь Разумеется, он также отбрасывается и при современном переходе к пределу.

[2] То обстоятельство, что здесь в соответствии с чертежом Бернулли с возрастает в направлении часовой стрелки, в противоположность принятому, не составляет большого неудобства.

то, согласно основному свойству (что радиус-вектор ρ возрастает пропорционально углу ϑ), полярное уравнение спирали будет:

$$\rho = m\vartheta .$$

Так как при $\rho = a$

$$\vartheta = 2\pi ,$$

то

$$a = m \cdot 2\pi , \; m = \frac{a}{2\pi},$$

и наше уравнение примет вид:

$$\rho = \frac{a}{2\pi}\vartheta .$$

Отсюда следует, что

$$BG = d\rho = \frac{a}{2\pi}\, d\vartheta .$$

Далее, мы получаем маленькую круговую дугу

$$FG = \rho \; d\vartheta .$$

Ее мы полагаем равной хорде FG. Из этого следует, что

$$\frac{BG}{FG} = \frac{a}{2\rho\pi},$$

откуда, как и выше, можно вычислить или AE, или AH.

Заметим дополнительно, что Архимед также произвел квадратуру спирали. Именно с этой целью он применил сумму квадратов целых чисел (см. выше № V). Действительно, если мы это проделаем по-современному, то в качестве дифференциала площади мы будем вычислять треугольник AFB, который, если пренебречь „бесконечно-малыми второго порядка“, равен треугольнику AFG, именно:

$$\triangle AFB = \frac{1}{2} AF \cdot AB \cdot d\vartheta = \frac{1}{2} \rho \, (\rho + d\rho) \, d\vartheta \approx \frac{1}{2} \rho^2 \, d\vartheta = \frac{a^2}{8\pi^2} \vartheta^2 \, d\vartheta .$$

Поэтому, например, площадь

$$AFBCA = \frac{a^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \vartheta^2 \, d\vartheta = \frac{1}{3} a^2\pi = \frac{1}{3} \text{ круга } CKDDC.$$

Это и есть XXIV теорема Архимеда. Хотя как в случае касательной, так и при квадратуре Архимед принимает во внимание

последующие завитки спирали (что мы получаем при увеличении ϑ за пределы 2π), но он не рассматривает вращения радиуса-вектора в другую сторону (т. е. для отрицательных ϑ), благодаря которому спираль получает вторую ветвь и теряет характер настоящей „спирали“ [1].

XX

Введение флюксий Ньютоном

Из „The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines“. By the Inventor Sir Isaac Newton, ... Translated from the Author's Latin Original not yet made publick. To which is subjoin'd a Perpetual Comment upon the whole Work ... By John Colson,..., London:... MDCCXXXVI.

Предварительное замечание. Это сочинение Ньютона также было закончено уже в 1671 г. Обыкновенно оно приводится под латинским названием „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“. Однако оригинал Ньютона, повидимому, утерян. Действительно, первое латинское издание под указанным заголовком (в „Opuscula“, ed. Castillioneus, т. I, 1744, стр. 29—199, ср. номер XVII) согласно примечанию в предисловии представляет собой обратный перевод на латынь с вышеуказанного английского издания, являющегося, вообще, первым изданием. Существует еще второе английское издание без указания автора, вышедшее в Лондоне в 1737 г. Кольсон (Colson) снабдил это, само по себе немалое, сочинение длинным предисловием и обширными комментариями (стр. 141—339).

Стр. 19.

Переход к методу флюксий

55... Но прежде всего следует заметить, что все трудности, связанные с этими [проблемами; в частности, относится к кривым], можно свести всего лишь к двум следующим проблемам, которые я представляю на (примере) отрезка (spatium), проходимого при движении [некоторым телом], с любым ускорением или замедлением.

56. I. *Длина проходимого отрезка постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана, требуется определить скорость движения в любое время.*

57. II. *Скорость движения постоянно дана, требуется определить длину пройденного в любое время отрезка.*

[1] См., например, книгу автора „Spezielle ebene Kurven“. Leipzig 1908, стр. 246 (фиг. 118).

58. Если, например, в уравнении $xx = y$ [величина] y представляет собой длину отрезка, пройденную за некоторое время, и если представить себе, что это время измеряется и изображается как проходимое другим отрезком x, возрастающим с равномерной скоростью $\dot{x}$ (20), то $2x\dot{x}$ представляет собой скорость, с которой отрезок y будет проходиться в указанный момент времени, и наоборот. В силу этого я в дальнейшем рассматриваю величины как бы порождаемыми [в процессе] непрерывного приращения, точно так же как тот отрезок, который проходит при движении тело или же какая-нибудь вещь.

59. Но, так как мы можем привлекать к рассмотрению время лишь в той мере, в которой оно выражается (is expounded = exponitur) и измеряется при равномерном движении, и так как, кроме того, сравнивать друг с другом можно только величины одного рода, а также их скорости при приращении и убывании, то я в последующем положу в основание не время как таковое (formally = formaliter), а приму, что одна из данных величин, которые все будут одного рода, возрастает благодаря непрерывному течению (Fluxion), и все остальные будут отнесены к ней, как ко времени. Поэтому по аналогии за этой [величиной] можно не без основания сохранить название времени. Таким образом повсюду, где в дальнейшем встречается слово время,..., под ним нужно подразумевать не время в его формальном значении, а только ту другую величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается (is expounded = exponitur) и измеряется время.

60. Те величины, которые я рассматриваю как постепенно и неограниченно (indefinite) возрастающие, я буду в дальнейшем называть *флюентами*, или *текущими величинами*, и обозначать их я буду последними буквами алфавита v, x, y и z... а скорости, с которыми возрастают вследствие порождающего их движения флюенты (и которые я назову флюксиями, или же просто скоростями, или быстротами), я буду обозначать теми же буквами, но пунктированными так: $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$...

(21) 61··· Проблема I

Найти отношение флюксий, если дано отношение текущих величин

Решение.

1. Расположи уравнение, которым выражено заданное отношение, по степеням одной из текущих величин, например x, и

перемножь его члены на (члены) какой-либо арифметической прогрессии [1], а также одновременно на $\frac{\dot{x}}{x}$. Это действие надо провести отдельно для каждой из текущих величин. Затем положи сумму всех произведений равной нулю и ты получишь искомое уравнение.

2. Пример 1. Если соотношение между текущими величинами x и y будет $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, то расположи члены сперва по x, а затем по y, и перемножь их следующим образом:

Умн. x^3	$- ax^2$	$+ axy$	$- y^3$	$- y^3$	$+ axy$	$- ax^2 + x^3$
на $3\frac{\dot{x}}{x}$	$2\frac{\dot{x}}{x}$	$\frac{\dot{x}}{x}$	0	$3\frac{\dot{y}}{y}$	$\frac{\dot{y}}{y}$	0
даст $3\dot{x}x^2$	$- 2a\dot{x}x$	$+ a\dot{x}y$		$- 3\dot{y}y^2$	$+ a\dot{y}x$	

Сумма произведений есть $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, и это уравнение дает отношение между флюксиями $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Действительно, если взять x произвольным образом, то y определится из уравнения $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Если это установлено, то мы получаем, что

$$\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay.$$

(24) . . .

Доказательство справедливости решения

(13) Моменты текущих величин (т. е. те неограниченно малые их части, благодаря прибавлению которых в неограниченно малые части времени они постоянно возрастают) находятся в том же отношении, что и скорости их течения или роста.

14. Если поэтому выразить момент одной из них, например x, через произведение ее скорости $\dot{x}$ на неограниченно малую величину o (т. е. через $\dot{x}o$), то моменты других v, y, z выразятся через vo, yo, zo, так как vo, $\dot{x}o$, yo и zo относятся друг к другу, как v, $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$.

15. Так как моменты, каковы $\dot{x}o$ и yo, суть безгранично малые приращения текущих величин x и y, на которые эти

[1] На то, что эта арифметическая прогрессия должна иметь ту же разность, что и ряд показателей степеней текущей величины, очевидно, по недосмотру, впервые указывается в § 19, стр. 25.

величины возрастают в течение отдельных неограниченно малых отрезков времени, то из этого следует, что эти величины x и y, после истечения неограниченно малого отрезка времени, превратятся в $x + \dot{x}o$ и $y + \dot{y}o$. Поэтому уравнение, во всякое время выражающее отношение между текущими величинами, будет также выражать отношение между $x + \dot{x}o$ и $y + \dot{y}o$, как и между x и y, так что вместо этих величин в это уравнение следует подставить $x + \dot{x}o$ и $y + \dot{y}o$.

16. Пусть будет дано какое-нибудь уравнение, хотя бы $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Подставим в него $x + \dot{x}o$ вместо x и $y + \dot{y}o$ вместо y. Тогда получится:

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 - \\ - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo + \\ + axy + a\dot{x}oy + ay\dot{x}o + o\dot{x}\dot{y}oo - \\ - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Но по предположению $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, и поэтому эти члены можно вычеркнуть. Если оставшиеся члены разделить на o, то останется $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + ay\dot{x} + a\dot{x}yo - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. Но, так как o, для того чтобы оно выражало моменты величин, предположено бесконечно-малым, то те члены, которые на него умножены, будут равны нулю по сравнению с остальными. Поэтому я ими пренебрегаю, и остается $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ay\dot{x} - 3\dot{y}y^2 = 0$, как и получилось выше в примере I.

18. Здесь мы можем отметить, что члены, свободные от o, всегда исчезают, так же как и те члены, которые помножены на степени o, высшие первой. Остальные же члены, после деления на o, всегда принимают тот вид, который они должны иметь, согласно вышеприведенному правилу. Что и требовалось доказать.

19. [Содержит только указания, что отсюда легко получается все прочее стоящее в правиле.]

Пояснительные замечания. Несомненно, что Ньютон после 1671 г. внес еще изменения в это сочинение, так же как и в цитированную в № XVII „Квадратуру кривых“, бывшую к этому времени, в основном, уже готовой. Возможно, что к числу этих изменений принадлежит введение скорости, не встречающейся еще в „Анализе посредством бесконечных рядов“. Мы теперь передадим все вышеприведенное в обозна-

чении Лейбница (т. е., в основном, — и в нашем). У Ньютона имеется одна независимая переменная, которая не указана и которую мы обозначим через t. Его $\dot{x}$ тогда будет равно $\frac{dx}{dt}$, т. е. скорости изменения x.

I задача состоит в составлении диференциального уравнения по заданному. Существо решения этой задачи мы дали выше. II задача состоит в интегрировании диференциального уравнения. Это, разумеется, многозначная задача, и Ньютон решил ее только для некоторых отдельных случаев. При этом Ньютон обнаруживает большое искусство и глубокое понимание дела.

Правило, данное им для решения задачи, — если ограничиться сперва случаем арифметической прогрессии показателей степени, — в точности то же самое, которым обладал и Лейбниц и которое применяем еще и мы. Если вместо $\dot{x}$ мы напишем просто dx, опуская dt, то действительно из уравнения

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

мы тотчас же получаем диференциальное уравнение

$$3x^2\,dx - 2ax\,dx + ay\,dx + ax\,dy - 3y^2\,dy = 0.$$

Даваемое теперь доказательство также в основных чертах совпадает с ньютоновским. Вместо x и y мы в уравнение подставляем $x + dx$ и $y + dy$, в результате чего получается выражение, аналогичное данному Ньютоном в § 16. Члены, не содержащие dx и dy, отпадают; затем мы де им все на dx и переходим к пределу при $dx \to 0$. Этот способ выражения еще был чужд Ньютону, но, отбрасывая члены, содержащие высшие степени o, он получает то же самое. Но, так как у него нет нашего перехода к пределу, то он вынужден все время употреблять слово „бесконечно-малый“ или „неограниченно малый“. В подобных простых случаях это не может дать повода ни к каким недоразумениям. Но у Ньютона имеются не просто dx и dy, как у Лейбница, а „моменты“, которые, будучи совершенно тождественными с „диференциалами“ Лейбница (см. конец № XVI), выражаются через скорости $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, умноженные на „бесконечно малую величину“ o. Так как эти моменты не что иное, как пути, проходимые за малую единицу времени, названную нами dt, то в нашем обозначении они равны $\frac{dx}{dt} \cdot dt = dx$ и $\frac{dy}{dt} \cdot dt = dy$. Таким образом введение скорости не дает Ньютону, по

крайней мере, в рассматриваемом случае, никаких преимуществ по сравнению с простой системой Лейбница.

Слово „течение" в рассуждениях подобного рода было введено еще Кавальери (см. выше № X), который, как мы уже говорили, заимствовал его, быть может, в неперовском учении о логарифмах, где оно как раз употребляется. Ньютон, во всяком случае, был знаком с ними обоими. Введение „скорости" в учение о кривых восходит через Барроу к Роберваль и Торичелли. Само собою разумеется, это — только стимулы, исходные пункты для дальнейшего творчества. Творческое использование этих стимулов представляет уже собственное открытие Ньютона, и по вышеприведенному примеру, излагающему только принципы, судить о том, насколько он превзошел всех своих предшественников, невозможно.

В § 58 Ньютон использует пример $y = x^2$ для исследования пути, причем x представляет собой не само время, а величину, ему пропорциональную, т. е., скажем, $x = ct$, так что $\dot{x}$ (дифференцируя по t) равно c, а $\ddot{x} = 0$. Тогда для скорости мы получим $\dot{y} = 2\dot{x}x$, а для ускорения $\ddot{y} = 2(\dot{x}\dot{x} + \ddot{x}x) = 2\dot{x}^2 = 2c^2 = \text{const}$. Таким образом мы имеем перед собой формулу равномерно ускоренного движения, которую мы теперь записываем в виде $s = \frac{1}{2}at^2$.

На первый взгляд представляется странным непривычное для нас общее правило Ньютона, согласно которому диференцируемые уравнения следует умножать не на ряд из показателей, а на любую арифметическую прогрессию с той же, что и у показателей, разностью и притом при диференцировании по x на другую, чем при диференцировании по y. Ньютон поступает подобным образом в таких примерах, где это облегчает вычисления. Но дело обстоит очень просто. Если в нашем примере слева взять, вместо 3, 2, 1, 0 ряд 5, 4, 3, 2, а справа, вместо ряда 3, 1, 0, ряд 1, — 1, — 2, то результат будет таков:

$$(5x^3 - 4ax^2 + 3axy - 2y^3)\frac{\dot{x}}{x} + \tag{I}$$

$$+ \left(-y^3 - axy \begin{matrix} + 2ax^2 \\ - 2x^3 \end{matrix}\right) \cdot \frac{\dot{y}}{y} = 0.$$

Подпишем под этим

$$(2x^3 - 2ax^2 + 2axy - 2y^3) \cdot \frac{\dot{x}}{x} + \left(2y^3 - 2axy \begin{matrix} + 2ax^2 \\ - 2x^3 \end{matrix}\right) \cdot \frac{\dot{y}}{y} = 0 \text{ (II)}$$

Уравнение (II) равно тождественно нулю, так как каждая скобка сама равна нулю. Если вычесть (II) из (I), то мы получаем обычный результат. Если бы мы в (I), вместо приведенных рядов, взяли $3 + m$, $2 + m$, $1 + m$, m и $3 + n$, $1 + n$, n, то в (II) нам нужно было бы начальное уравнение умножить слева на m, а справа на n. Из этого общее правило становится достаточно ясным. То обстоятельство, что Ньютон привел правило как раз в этой общей форме, показывает, насколько глубоко он проник в сущность дела. Хотя комментарии Кольсона и очень многословны, но как раз в этом месте он не говорит ни слова

XXI

Производная синуса

Из „Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum". Auctore Leonhardo Eulero .. Impensis Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae, 1755 Место печатания указано в конце книги: Berolini ex officina Michaelis. Перепечатано в новом большом издании сочинений Эйлера: Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium helveticae, edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel. Series I. Opera mathematica. Vol. X. Ed. Gerhard Kowalewsky. Lipsiae et Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri MCMXIII. Немецкий перевод: „Leonhard Eulers Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung,... von Johann Christian Michelsen,.. Erster Teil. Berlin und Libau,... 1790". Вторая и третья части вышли в 1790 и 1793 гг., дополнение Грюзона (Grüson) в 1798 г.

Предварительное замечание. Сочинение, из которого мы заимствуем нижеследующую маленькую главу, представляет собой первый систематический учебник дифференциального исчисления, и притом чистого дифференциального исчисления без приложений к геометрии. Оно представляет собой большой том в 880 страниц in quarto. В 1768—1770 гг. Эйлер (Euler) выпустил еще более объемистый учебник интегрального исчисления в 3 томах. Вместе с „Introductio in analysin infinitorum" Эйлера же (Lausannae 1750) (см. вып. II, № XXI) эти книги дают полную картину тогдашнего исчисления бесконечно-малых, располагавшего к тому времени уже огромным материалом. Но уже переводчик Михельсен (Michelsen) говорит (I часть, стр. LX, примечание), что при возведении своего прекрасного здания дифференциального исчисления Эйлер пользовался лесами, составленными из непрочных бревен. Это означает, что после эпохи открытия исчисления бесконечно-малых, когда, по крайней мере, не позабыли еще архимедову строгость доказательства и в случае необходимости могли ее и применить, — после этой эпо и благодаря изобилию

накопившихся результатов наступила величайшая беззаботность по части логического обоснования теории. Следующий отрывок может служить примером этому. С чисто фактической стороны он содержит в себе впервые вывод этой и других производных тригонометрических и круговых функций, которые Эйлер, вообще, впервые систематически ввел в анализ в своем „Введении“ („Introductio“).

Стр. 171 („Opera“, ser. I, X, стр. 137, нем. пер., I часть, стр. 173).

201. Остаются еще величины, получающиеся путем обращения этих величин [т. е. ранее рассмотренных функций arc sin и т. д.], а именно синусы и тангенсы данных дуг. Мы покажем, как их нужно диференцировать (differentiare). Допустим, что x представляет собой дугу окружности, а $\sin x$ есть ее синус, диференциал которого мы ищем. Положим $y = \sin x$ и заменим x через $x + dx$. Тогда y перейдет в $y + dy$:

$$y + dy = \sin(x + dx) \text{ и } dy = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Но $\sin(x + dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$ [1], и так как, как мы показали во Введении (т. е. в вышеупомянутом „Introductio“), что

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{и т. д.},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{и т. д.},$$

то, отбрасывая исчезающие члены, мы получаем, что $\cos dx = 1$ и $\sin dx = dx$, а отсюда следует, что $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cdot \cos x$. Таким образом, если $y = \sin x$, то $dy = dx \cos x$. *Следовательно, диференциал синуса какой-нибудь дуги равен диференциалу дуги, умноженному на косинус.* Таким же образом, если p есть какая-либо функция x, то $d \sin p = dp \cdot \cos p$.

Пояснительные замечания. Общепринятый вывод производной $\sin x$ имеется во всех учебниках, так что я могу здесь

---

[1] Оригинал здесь набран уже так, как мы это делаем в настоящее время, т. е. обозначения функций набраны шрифтом антиква, аргументы же — курсивом. Но в переводе Михельсена все набрано снова по-старинному шрифтом антиква, и за знаком функции встречаются даже снова точки для сокращения. См. вып. II, № XXI.

считать его известным читателю. В вышеприведенном выводе, прежде всего, заслуживает внимания применение рядов, которые старые математики, вообще, охотно использовали. Против этого, само по себе, возразить нечего, так же как нас не затруднит выражение „отбросим исчезающие члены“, т. е высшие степени dx, ибо этому (так же как и у Ньютона, см. выше № XVII) легко придать логически строгую форму. Для этого нужно только в формуле $\sin(x+dx)$ поставить полностью ряды, разделить на dx и затем перейти к пределу при $dx \to 0$.

Но в настоящее время мы уже не пользуемся более рядами (как более сложным) при выводе производной (как более простой), а, наоборот, выводим ряды, опираясь на производные и подставляя их в общую строку Тэйлора (см. конец № XVIII). Но ранее поступали не так. Мы уже у Ньютона и Лейбница видели, как они выводили в каждом отдельном случае свои ряды. Если мы обратимся к „Introductio“ Эйлера (т. I, § 134, стр. 99), то мы увидим, что Эйлер сперва при помощи теоремы Муавра (см. выпуск II) и формулы бинома выводит формулы для $\cos nz$ и $\sin nz$, затем берет n бесконечно большим, а z бесконечно малым, так, чтобы при этом nz сохраняло конечное значение v, и затем сразу (основываясь, во всяком случае, на геометрических соображениях) принимает (а это в нашем примере он как раз хочет доказать при помощи рядов), что $\sin z = z$ и $\cos z = 1$ (для бесконечно малого z). Подставляя $\cos z = 1$ и $\sin z = \frac{v}{n}$ в формулы для $\cos nz$ и $\sin nz$, он получает примененные в нашем примере ряды $\cos v$ и $\sin v$.

Из этого, в первую очередь, видно, что при выводе (приближенных) уравнений $\cos dx = 1$, $\sin dx = dx$ Эйлер не имел права пользоваться выведенными как раз в этих предположениях рядами. Но, и не говоря об этом, вывод самих рядов Эйлером вызывает большие сомнения. Он, собственно говоря, пригоден только при очень большом (и целочисленном!) n и соответственно малом z, да и то лишь приближенно. Но, пока n конечно, коэфициенты рядов не принимают той простой формы, которую они имеют в рядах $\sin v$ и $\cos v$. Таким образом справедливость этих рядов должна была быть еще отдельно доказана.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Альберт Великий (1193—1280). Родился в Лауингене (Швабия). Настоящая фамилия — граф А. ф. Больштедт (Bollstädt). Был доминиканцем, в 1260—1262 гг. епископом Регенсбургским, затем профессором университетов в Париже и Кельне. Величайший философ и теолог средневековья 24.

Альхайтам (см. Ибн Альхайтам).

Анаксагор (ок. 500—428 г. до н. э.). Родом из Клазомен в Малой Азии. Первый стал преподавать в Афинах философию 24.

Анри, Шарль (1859—1927). Руководитель физиологической лаборатории в Париже. Издал ряд сочинений и собраний переписки древних авторов, частью один, частью в сотрудничестве с другими 70, 78.

Апельт, Отто (род. в 1845 г. в Иене). Преподаватель древних языков. Выпустил немецкий перевод Платона 23, 25, 27.

Аполлоний (265—170). Родился в в Перге (Памфилия), учился в Александрии, позднее жил в Пергаме. Один из крупнейших греческих математиков. Из его сочинений сохранились только „Конические сечения" (4 книги по-гречески, следующие 3 по-арабски; 8-я книга утеряна) 23, 38, 54.

Аристотель (384—322). Один из крупнейших философов древности. Ученик Платона, учитель Александра Македонского. Его философская система господствовала в течение всего средневековья. Был выдающимся естествоиспытателем 13, 23, 25, 26, 27.

Архимед (287—212 до н. э.). Жил в Сиракузах, где и был убит при захвате города римлянами. Наиболее выдающийся математик древности и один из крупнейших математиков вообще. Сочинения его по большей части сохранились 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 55, 61, 62, 70, 71, 73, 76, 82, 84, 86, 98, 106, 112, 113, 114, 115.

Барроу, Исаак (1630—1677). Родился и умер в Лондоне. Выдающийся теолог и математик. В 1669 г. уступил кафедру математики в Кембридже своему ученику Ньютону. Затем был придворным капелланом, а в 1675 г. канцлером Кембриджского университета. Его работы имеют очень большое значение для предистории исчисления бесконечно-малых 89, 90, 91, 92, 94, 95, 99, 100, 102, 121.

Беккер, Оскар (род. в 1889 г.). Профессор философии во Фрейбургском университете 25.

Бернулли, Иоганн (1667—1748). Родился в Базеле, умер там же, будучи преемником по кафедре математики своего брата Якова (см.). Выдающийся ученый в области исчисления бесконечно-малых 111, 112, 113, 114.

Бернулли, Яков (1654—1705). Родился в Базеле, умер там же, будучи профессором математики в университете. Продолжал в

области исчисления бесконечно-малых работу Лейбница 97.

Бортолотти, Этторе (род. в 1866 г.). Профессор математики в университете в Болонье, его родном городе. Историк математики 90.

Босман, Анри (1852—1928). Родился в Мехелне, умер в Брюсселе, где он в течение 40 лет работал в качестве учителя математики в иезуитской гимназии Сен-Мишеля. Имеет ряд серьезных исторических работ, особенно о бельгийских математиках 67, 82.

Брадвардин, Фома (ок. 1290—1349). Архиепископ Кентерберийский. Философ с некоторым математическим уклоном; принадлежал к течению Дунса Скотта (см.) 24.

Броункер, Лорд Виллиам (1620?—1684). Родился в Ирландии, канцлер Карла II, один из основателей Королевского общества 100.

Броувер, Эгберт (род. в 1881 г.). Профессор математики в Амстердамском университете 27.

Бруншвиг, Леон (род. в 1869 г.). Профессор философии в Сорбонне (Париж) 81.

Бутру, Пьер (1880—1922), сын философа Эмиля Бутру. Профессор математики в университете в Пуатье, затем в Collège de France в Париже 81.

Бекон, Роджер (1214?—1294? Оксфорд). Боевой францисканец; как философ очень подчеркивал значение опыта и эксперимента 24.

Ваард, Корнелис де (род. в 1879 г.). Учитель математики во Флисингене. Историк математики и физики 80.

Валерио, Лука (1552?—1618). Профессор математики и физики в гимназии в Риме. Член академии dei Lincei 49, 52, 53, 55, 61.

Валлис, Джон (1616—1703). Изучал теологию и математику, которую он преподавал в Оксфорде. Ученик Оутреда (см.). Позднее придворный священник Карла II. Член Королевского общества с самого его основания в 1663 г. Один из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых. Выдающийся лингвист 94, 99, 100.

Валльнер, Карл (род. в 1881 г.). Учитель математики в реальном училище в Ротенбурге 48.

Вассура, Джузеппе (1919). Инженер 67, 90.

Вейерштрасс, Карл (1815—1897). Сперва учитель, затем профессор математики в Берлинском университете 5.

Виета, Франсуа (1540—1603). Родился в Пуату. Советник „парламента" (высшей судебной палаты) в Ренне, затем в Бове sur Mer. Умер в Париже членом тайного совета Генриха IV. Один из крупнейших математиков начала нового времени. „Отец алгебры". См. также I выпуск 79.

Газье, Феликс (1914). Один из издателей сочинений Паскаля 81.

Гален, Клавдий (131—201). Знаменитый в древности врач (см. Рота).

Галилей, Галилео (1564—1642). Родился в Пизе, был там профессором математики, затем профессором в Падуе, а позднее (номинально) снова в Пизе, хотя и жил во Флоренции. Наиболее крупный физик начала нового времени; при помощи подзорной трубы сделал выдающиеся астрономические открытия. За энергичную защиту коперниканской системы был осужден инквизицией (1633 г.) и умер под арестом в своей вилле в Арчетри близ Флоренции 24, 61.

Галлуа, Жан (1632—1707), аббат, профессор греческого языка в Collège roval в Париже. Издатель (1665—1674) Journal des savants 106.

Гейберг, Иоганн Людвиг (1854—1928). Был профессором классической филологии в Копенгагенском университете. Переиздал

сочинения ряда греческих математиков (и медиков) по рукописям 7, 8, 9, 10, 17, 31, 33, 43, 113.

Гейнце, Рихард (род. в 1867 г. в Наумбурге). Профессор классической филологии в Лейпцигском университете 25.

Гергардт, Карл Иммануил (1816—1899). Жил в Эйслебене. Историк математики, выдающийся знаток Лейбница 94, 95, 96, 106, 107.

Герланд, Эрнст (1838—1910). Профессор физики в Горной академии в Клаустале 81.

Герон Александрийский. Повидимому, землемер и техник. Как время его жизни, так и научное значение его являются предметом споров между исследователями. И. Л. Гейберг (см.) и его ученики относят его к III в. после н. э. и считают его довольно некритическим компилятором. Э. Хонле (Норре) (Гёттинген) переносит его в I в. до н. э. и считает самостоятельным математиком и физиком. Имеются также сторонники взгляда, что он жил между III и I в. до н. э. 43, 49.

Гильберт, Давид (род. в 1862 г. в Кенигсберге). Профессор математики в Гёттингенском университете 7, 27.

Гиппократ, Хиосский (ок. 440 г. до н. э.). Один из лучших греческих математиков, занимавшийся квадратурой круга и при этом открывший квадратуру различных луночек круга 13.

Говестадт, Генрих (1853—1926). Учитель математики в Мюнстере 14.

Гофман, Иос. Э. (род. в 1900 г.). Учитель математики в Мюнхене 6.

Грегори, Джемс (1638?—1675). Родился в Эбердине (?), несколько лет провел в Италии, умер профессором математики в Эдинбургском университете 94, 109.

Григорий из Сент Винцента (1584—1667). Бельгийский иезуит, благодаря своей большой работе о квадратуре круга и о конических сечениях (Антверпен 1647) является одним из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых 14, 77, 81, 82.

Грюзон, Иоганн Филипп (1768—1857). Профессор математики в университете и во французской гимназии в Берлине 122.

Гульдин, Пауль (1577—1643). Родился в Ст. Галлене, был иезуитом, профессором математики в Грацском университете 60, 61, 86.

Гюйгенс, Христиан (1629—1695). Родился и умер в Гааге. Юрист и наряду с этим выдающийся математик и физик. С 1666 по 1681 г. проживал в качестве действительного члена Академии наук в Париже. В 1691 г. в Лейдене вышел его „Traité de la lumière" 86, 94, 110.

Декарт, Рене (1596—1650). Выдающийся французский философ и математик. Одновременно с Ферма открыл метод аналитической геометрии, придав ему, однако, более современную форму, чем Ферма, особенно в части алгебраической символики (см. III выпуск) 24, 79, 84, 90, 91, 94, 95, 96, 97, 110.

Демокрит (460—371?) из Абдеры. Хотя и не был основателем, но в древности считался главным представителем атомистического мировоззрения, перенесенного им также и на всю духовную жизнь. Представитель жизнерадостного миросозерцания („смеющийся философ") 8, 24, 27, 44.

Деттонвилль, Амос (псевдоним Паскаля) 81.

Джонс, Виллиам (1675—1749). Учитель математики. Член Королевского общества 99.

Диофант (конец III столетия). Жил в Александрии. В своей „Арифметике" обнаруживает большое остроумие при решении уравнений и систем уравнений, а также задач из теории чисел 71, 78.

Дунс Скотт, Иоганн (ок. 1270—1308). Родился, вероятно, в Шотландии, был францисканцем, преподавал теологию и философию в Оксфорде, Париже и Кельне, где он и умер. Противник Фомы Аквинского (см.) 24.

Закс, Ева (род. в 1882 г.). Знаток классической филологии; проживает в Берлине 25.

Зенон (ок. 450 до н. э.). Принадлежал к философской школе элейцев (Элеа в южной Италии). Знаменит остроумными софизмами, по существу направленными против атомизма Демокрита (см.) 14, 25.

Зутер, Генрих (1848—1922). Учитель математики в Цюрихе. Выдающийся знаток арабской математики 67.

Ибн Альхайтам (965—1039). Родом из Басры в Месопотамии; позднее жил в Каире. Выдающийся астроном и математик 67.

Иоахим, Гарольд Генри (род. в 1868 г.). Профессор логики в Оксфордском университете 24, 25, 27.

Кавальери, Бонавентура (1598—1647). Иезуат (не иезуит!). Профессор Болонского университета. Ученик Галилея. Один из крупных предшественников творцов исчисления бесконечно-малых 24, 43, 49, 53, 61, 62, 64, 65, 66, 81, 94, 121.

Кеплер, Иоганн (1571—1630). Вюртембержец, сперва изучал (протестантскую) теологию, затем учитель математики в Граце и Линце, в промежутке — придворный астроном Рудольфа II; Фердинандом II назначен придворным математиком. Открыл законы движения планет; имеет выдающиеся достижения в оптике. Один из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 66, 67, 112.

Киллинг, Вильгельм (1847—1923). Был профессором математики в Мюнстерском университете 14.

Клим, Фридрих (род. в 1887 г. в Бисмаркхютте, Верхняя Силезия). Бреславльский математик 10, 17, 19.

Клуг, Р. (1908) 54.

Ковалевский, Гергард (род. в 1876 г.). Профессор математики в Высшем техническом училище в Дрездене 94, 95, 97, 122.

Коллинс, Джон (1625—1683). Родился в Оксфорде происходя из низов, стал впоследствии членом и секретарем Королевского общества. Значение его заключается в издании сочинений других авторов и в его научной переписке 99.

Кольсон, Джон (1680—1760). Профессор математики в Кембриджском университете 116.

Коммандино, Федериго (1509—1575). Врач и математик герцога Урбино (гор. Урбино — его родина). Принадлежит к числу первых ученых, возродивших геометрию древних 52.

Ксенократ (396—314). Греческий философ из школы Платона 24, 25, 103.

Лейбниц, Готтфрид Вильгельм фон (1646—1716). Родился в Лейпциге, под конец жил в Ганновере. Многосторонний ученый, математик и философ. Открыл дифференциальное и интегральное исчисление (см. также Ньютон). Высказал основную идею принципа сохранения энергии 86, 87, 88, 89, 90, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 106, 107, 108, 109, 110, 114, 120, 121, 124.

Лопиталь, Гильом Франсуа де (1661—1704). Жил в Париже. Был офицером. Написал также курс по аналитической геометрии конических сечений (см. III выпуск, гл. XI) 112.

Лорей, Вильгельм (род. в 1873 г.). Математик; доцент страховых наук в Лейпциге 6.

Лориа, Джино (род. в 1862 г. в Мантуе). Профессор математики

в университете в Генуе. Историк математики 67, 90.

Мавролик, Франческо (1494—1575). Член духовного ордена, затем аббат, преподавал математику в Мессине, родном его городе. Один из первых ученых, воскресивших математику древних, особенно Архимеда 52.

Манке, Дитрих (род. в 1884 г.). Сперва учитель математики, а с 1927 г. профессор философии в Марбургском университете. Выдающийся знаток Лейбница 87, 88, 111.

Меркатор, Николай (1620—1687). Родился в Гольштейне, жил в Копенгагене и Лондоне (член Королевского общества), инженер; умер в Париже 100, 108.

Михельсен, Иоганн Андрей Христиан (1749—1797). Учитель математики в Берлине. Знаменитый педагог 122.

Монтальт, Луи де (псевдоним Паскаля) 81.

Муавр, Абрагам де (1667—1754). Будучи протестантом, был вынужден переселиться из Франции в Лондон, где давал частные уроки. Плодовитый математик 124.

Непер (Neper), Джон (собственно Napier или сходным образом) (1550—1617). Шотландский дворянин-помещик. Изобретатель логарифмов 77.

Ньютон, Исаак (1642—1727). Родился в Грентхеме в Линкольншайре. Сперва профессор в Кембриджском университете (см. Барроу), затем директор королевского монетного двора в Лондоне. Умер в Лондоне. Открыл диференциальное и интегральное исчисление (см. также Лейбниц). Значительно содействовал развитию оптики (цветорассеяние) и небесной механики (закон тяготения) 90, 94, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 105, 106, 109, 110, 116, 119, 120, 121, 122, 124.

Оутред, Виллиам (1574—1660). Английский сельский священник. Значение его как математика — в развитии алгебраической и гониометрической символики (знак умножения). Изобретатель счетной линейки 90.

Папп (конец III в. после н. э.). Составил большой, не лишенный самостоятельности, сборник, содержащий много выдержек из затерянных сочинений древних математиков 55, 61.

Паскаль, Блез (1623—1662). Родился в Клермон-Ферране. Философски-религиозный мыслитель. Под конец жизни—аскет. Крупный геометр и физик (гидростатика). Предшественник творцов исчисления бесконечно-малых. Вместе с Ферма (см). заложил основы теории вероятностей и изобрел счетную машину. Знаменит также как писатель 24, 81, 82, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 94, 98, 102.

Перц, Георг Генрих (1795—1876). Историограф брауншвейг-люнебургской фамилии 94, 106.

Платон (429?—348?). Один из крупнейших философов древности. Учитель Аристотеля. Пользовался большим влиянием в средние века, особенно в раннее время 25, 27.

Плутарх (ок. 50—120 после н. э.) из Хейронеи. Написал широко известные жизнеописания знаменитых греков и римлян 44.

Рекорд, Роберт (1510—1558). Врач и математик в Лондоне. В 1557 г. издал „Whetstone of witte“ („Оселок остроумия“), где ввел знак равенства в виде = 108.

Роберваль, собственно Персонь, Жиль (1602—1675). Родился в Робервале в деп. Уазы, профессор математики в Collège de France в Париже. Один из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых 79, 121.

Росс, Виллиам Давид (род. в 1877 г.). Профессор этики в Оксфордском университете 24.

Рота, Юлий Марциан (ок. 1500). Итальянский гуманист. В 1528 г.

выпустил четырехтомное издание Галена (в Венеции) 24.

Рудио, Фердинанд (род. в 1856 г.). Профессор математики в Высшем техническом училище в Цюрихе 122.

Симплиций (начало VI в. н. э.). Вместе с шестью другими профессорами высшей афинской школы, запрещенной в качестве языческой имп. Юстинианом в 529 г., переселился в Персию. Написал хорошие комментарии к Аристотелю, ценные также благодаря историческим указаниям 13.

Смит, И. А. (1908) 24.

Стевин, Симон (1548—1620). Инженер на службе у Морица Оранского. Хороший алгебраист и теоретический механик. Особенно замечательна вышедшая в Лейдене в 1585 г. его книга „De thiende" (по-фламандски — десятичное исчисление), в которой он рекомендовал всем правительствам применение десятичных мер 81, 82.

Стюарт, Джон (ум. в 1765 г.). Профессор математики в Эбердине 99.

Таке, Андрей (1612—1660). Профессор в колледжах иезуитов в Лувене и Антверпене, родном его городе 81.

Таннри, Поль (1843—1904). Был директором кожевенного завода; выдающийся историк математики и астрономии, знаток особенно греческой древности. Один из издателей сочинений Декарта 70, 71, 78.

Тейлор, Брук (1685—1731). Член Королевского общества 111, 124.

Теофраст (390—305 до н. э.). После смерти Аристотеля (см.) глава его философской школы в Афинах 24.

Тиме, Герман (1852—1926). Математик в Бромберге 14.

Торичелли, Эвангелиста (1608—1647). Родился в Фаенце (пров. Равенна). Преемник и ученик Галилея (см.); умер во Флоренции. Выдающийся математик и физик (барометр) 67, 69, 70, 90, 121.

Тропфке, Иоганн (род. в 1856 г. в Берлине). Составитель большой „Истории элементарной математики" (2-е изд., 7 томов, Берлин, 1921/24) 6.

Ферма, Пьер де (1601—1665). Родился близ Тулузы. Судья в „парламенте" (высшей судебной палате) в Тулузе. Один из крупнейших математиков (см. III выпуск). Один из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 80, 84, 95.

Фладт, Куно (род. в 1889 г. в Орнбене). Штутгартский математик 7.

Франк, Эрих (род. в 1883 г.). Профессор философии в Марбургском университете 25.

Фома Аквинский (1225—1274). Родился в Неаполитанской области, происходил из графского рода, доминиканец. Наряду с Альбертом Великим (см.) и в качестве ученика его крупнейший теолог и философ схоластики; преподавал в Кельне, Париже и итальянских университетах 24.

Фриш, Христиан (1807—1881). Жил постоянно в Штутгарте, где был директором высшего реального училища. Математик. Издатель сочинений Кеплера 57.

Хизс сэр, Томас Литтль (род. в 1861 г. в Барнетби, Линкольншайр). До 1891 г. Fellow в Trinity College в Кембридже, затем до 1926 г. занимал высокие посты в казначействе и управлении государственными долгами. Составил двухтомную историю греческой математики, издал трехтомный перевод Эвклида, затем переводы и переработки из Аристарха, Архимеда, Аполлония и Диофанта 10, 17, 19.

Цейтен, Иероним Георг (1839—1920). Профессор математики в Копенгагенском университете.

Выдающийся знаток греческой математики и покоящейся на ней математики эпохи Возрождения 43, 77.

Чвалина, Артур (род. в 1884 г. в Познани). Математик в Гумбинене 17, 28, 33.

Чирнгауз(ен), Эренфрид Вальтер граф фон (1641—1708). Математик. Считается изобретателем фарфора 87, 94.

Шарлоттенбург, Пауль (1861—1924). Учитель математики и приват-доцент в Высшем техническом училище в Берлин-Шарлоттенбурге 112.

Шене, Герман (род. в 1870 г. в Галле на Зале). Профессор классической филологии в Мюнстерском (Вестфалия) университете 49.

Штекель, Пауль (1862—1919). Профессор математики в Гейдельбергском университете. Написал также ряд статей исторического характера 122.

Штенцель, Юлий (род. в 1883 г. в Бреславле). Профессор классической филологии и философии в Кильском университете 25.

Эвдем (ок. 320 г. до н. э.). Родом с острова Родоса. По предложению своего учителя Аристотеля написал историю геометрии, из которой у других авторов, например Симплиция (см.), сохранились выдержки 13.

Эвдокс (410?—356?). Родом из Книда в Малой Азии. Выдающийся предшественник Эвклида в учении о пропорциях и Архимеда в инфинитезимальной геометрии. Также астроном. Из сочинений Эвдокса до нашего времени не сохранилось ничего 8, 13, 14, 44.

Эвклид (по-гречески Эуклейдес). Жил ок. 300 г. до н. э. в Александрии. Его „Начала" геометрии, содержащие в геометрической форме также и алгебру, доныне служат прообразом наших элементарных учебников. Остальное см. в 1 выпуске 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 38, 101.

Эвтокий (ок. 340 г. после н. э.). Родился в Аскалоне, ученик Исидора, вновь отстроившего храм Софии в Константинополе. Комментатор Аполлония и Архимеда 17, 27.

Эйлер, Леонард (1707—1783). Родился в Базеле; академик; жил в Петербурге и Берлине. Выдающийся и очень плодовитый математик, сочинения которого сейчас выходят в большом издании 122, 123.

Эратосфен (276—195?). Родился в Кирене (Сев. Африка). Выдающийся географ (измерение градуса) и астроном. Заведывал большой Александрийской библиотекой 43.

Юнге, Густав (род. в 1879 г.). Учитель математики в Берлине 17.

Оглавление.

Стр.

Предисловие 5
I. Аксиома измерений (так называемая аксиома Архимеда) . . . 7
II. Отношение площадей двух кругов 10
III. Квадратура параболы при помощи бесконечной геометрической прогрессии 17
IV. Опровержение учения о линиях-атомах 23
V. Сумма квадратов чисел 27
VI. Объем сфероида (эллипсоида вращения) 33
VII. Вычисление Архимедом объема шара 43
VIII. Вычисление объема шара в XVII столетии 49
IX. Яблокообразное тело Кеплера 53
X. Сумма квадратов неделимых треугольника 61
XI. Острое гиперболическое тело Торичелли 67
XII. Квадратура всех гипербол высших порядков 70
XIII. Метод максимумов и минимумов у Ферма 78
XIV. Характеристический треугольник Паскаля. Тригонометрические интегралы 81
XV. Дифференцирование и интегрирование как взаимно обратные действия 89
XVI. Первые напечатанные правила дифференцирования 94
XVII. Бесконечные ряды для арксинуса, синуса и косинуса . . . 99
XVIII. „Арифметическая квадратура“ круга 106
XIX. Касательная к спирали Архимеда 112
XX. Введение флюксий Ньютоном 116
XXI. Производная синуса 122
Именной указатель 125