

52
E70

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ СЕЙСМОЛОГИИ

Ж.С.ЕРЖАНОВ
А.А.КАЛЫБАЕВ

Общая теория вращения ЗЕМЛИ



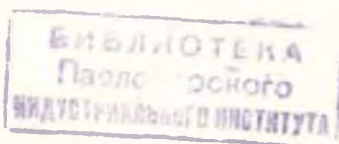
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1984

Ержапов Ж. С., Калыбаев А. А. Общая теория вращения Земли.— М.: Наука, 1984.

Общая теория вращения Земли построена в неограниченной постановке задачи о ньютоновом взаимодействии Земли, рассматриваемой как абсолютно твердое тело, Луны, Солнца и больших планет, принятых за материальные точки. В основу теории положены качественные методы небесной механики и принято во внимание, во-первых, трехосность центрального эллипсоида инерции и динамическая неуравновешенность Земли, во-вторых, взаимосвязь поступательного и вращательного движений Земли, в третьих, динамическая связь между общими пространственными движениями тел Солнечной системы в целом и специфические особенности движения Земли: вековое движение полюсов и замедление вращения Земли, периодические вариации элементов вращения Земли относительно центра масс, постоянные прецессии и нутации земной оси, механизмы векового удаления Луны от Земли и сближения орбит тел Солнечной системы с неизменяемой плоскостью Лапласа. Выводы теории имеют важное значение для постановки и решения прикладных задач небесной механики и астродинамики, научно-технических задач геодезии, геологии и геофизики. Ил. 17. Табл. 11. Библиогр. 129 назв.

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
В. Г. ДЕМИН

383511



Предисловие

И. Ньютон, сформулировав в своем знаменитом трактате «Математические начала натуральной философии» законы механики и доказав их непротиворечивость, построил основы классической механики — науки о движении материальных тел в пространстве и во времени.

Одним из разделов классической механики является теория вращения Земли, где Земля рассматривается как абсолютно твердое тело. Теория возникла в рамках задачи трех тел при следующих исходных предположениях. Во-первых, Земля вместе с центром масс совершает известное поступательное движение, во-вторых, вращение Земли относительно этого центра масс происходит под действием момента сил притяжения со стороны Луны и Солнца — материальных точек, совершающих также заранее известные движения. Такую постановку задачи теории вращения небесного тела, когда пренебрегают динамической взаимосвязью поступательного и вращательного движений тела, считая движение его центра масс заданным, принято называть *ограниченной*.

Вращение Земли с позиций классической механики было впервые рассмотрено И. Ньютоном, позднее — Ж. Д'Аламбером в ограниченной постановке задачи. Эти исследования характеризовали лишь качественную сторону прецессии и нутации земной оси, представляющих равномерную и периодическую составляющие сложного перемещения полюса мира вокруг полюса эклиптики, обусловленного притяжением экваториального избытка масс Земли Луной и Солнцем. Значительно более строгая и полная теория вращения Земли, отличающаяся как по содержанию, так и по математической форме от предшествующих, построена Л. Эйлером. В работе, опубликованной в 1769 г. под названием «Подробное исследование явлений, которые могут производиться в суточном вращении Земли силами небесных тел», помимо прецессии и нутации земной оси, им рассмотрено движение полюса Земли. Показана принципиальная возможность такого движения и для модели Земли, представленной слабо сжатым эллипсоидом, вычислен период колебания полюса — *свободный период Эйлера*. Основополагающее значение этой работы Эйлера было осознано лишь в конце прошлого столетия.

В настоящее время существует одна общепринятая теория вращения Земли, называемая *стандартной*. Ее аналитическую основу составляют известные в небесной механике уравнения Пуассона прецессии и нутации земной оси в поле ньютонова притяжения. Они являются следствием кинематических и динами-

ческих уравнений Эйлера и получены в ограниченной постановке задачи трех тел — динамически симметричной Земли и рассматриваемых как материальные точки Луны и Солнца. Как уже отмечено выше, теория вращения Земли в указанной постановке принадлежит Эйлеру, а дальнейшее ее совершенствование связано лишь с количественными уточнениями. В последние годы японским ученым Киношитою построена численно-аналитическая модификация в той же ограниченной постановке задачи трех тел, учитывающей динамическую асимметрию Земли и структуру ее гравитационного поля.

Результаты наблюдений с поверхности Земли положений и скоростей небесных тел нуждаются в редукциях — приведении к единой системе отсчета, соответствующей фиксированному моменту времени — какой-либо начальной эпохе. Редукционные вычисления определяют поправки к наблюдениям, учитывающие прежде всего прецессию и нутацию земной оси. Стандартная теория вращения Земли достаточно хорошо отражает действительный характер ее прецессионного и нутационного движений, именно поэтому она утверждена Международным астрономическим союзом и является основой для редукционных вычислений в астрономических ежегодниках.

Однако стандартная теория, базируясь на исходных упрощениях и на численном интегрировании уравнений движения, не позволяет выявить ряд существенных особенностей вращения Земли, таких, как вековое движение полюсов Земли, вековое изменение угловой скорости ее вращения, спектры периодических вариаций элементов ее вращательного движения. Она не позволяет также установить динамическую взаимосвязь вращения Земли с поступательными движениями как самой Земли, так и других планет Солнечной системы. В связи с этим возникает необходимость построения общей-качественной теории вращательного движения Земли в рамках модели Солнечной системы — взаимного притяжения по закону Ньютона Земли как абсолютно твердого тела, Луны, Солнца и больших планет как материальных точек.

Настоящая книга посвящена построению и анализу общей теории вращения динамически асимметричной и динамически неуравновешенной Земли в неограниченной постановке задачи n тел, учитывающей взаимосвязь их поступательных и вращательных движений. Такой подход оказался возможным в связи с развитием качественных методов небесной механики, разработанных для исследования метрических свойств фазовых движений, в частности КАМ-теория *. Немалую роль сыграло также изучение особенностей структуры геопотенциала — гравитационного поля Земли по спутниковым данным. Изучение геопотенциала получило бурное развитие после запуска 4 октября 1957 г. первого советского искусственного спутника Земли.

* Теория получила обозначение от первых букв фамилий ее авторов — А. И. Колмогорова, В. И. Арнольда и М. Мозера.

Общая теория вращения Земли позволяет выявить эволюцию механической модели Солнечной системы вообще и специфические особенности поступательно-вращательного движения Земли в частности для постановки прикладных задач небесной механики и аэродинамики. Помимо прямого назначения, ее выводы играют важную роль в решении ряда научно-технических задач геодезии. Так, механизмы вековых вариаций элементов вращательного движения и динамической неуравновешенности Земли дают возможность обосновать систему редуцирования данных опорной геодезической сети и геодинамических полигонов о фигуре Земли и современных горизонтальных движениях литосферы и земной коры.

Общая теория вращения Земли имеет первостепенное значение в геологии и геофизике для обоснования физических механизмов тектонических движений, составляющих ведущее звено эволюции геологических процессов в истории Земли. Ибо существующие концепции глобальных движений, расширяющейся Земли, фиксизма и тектоники плит имеют сугубо кинематический характер — они не учитывают движущие силы.

Различные вопросы этого аспекта исследований, лежащих в основе книги, были поставлены перед авторами выдающимся ученым академиком А. Л. Яншиным. Сюда относятся разнообразные задачи о вековом движении земных полюсов, о механизме динамической неуравновешенности Земли и роли геофизического массообмена в прошлом, о связи главнейших черт строения литосферы со структурой геопотенциала, о степени обусловленности геологических процессов силами взаимодействия Земли с телами Солнечной системы. По мнению А. Л. Яншина, общая теория вращения Земли должна быть единой физико-математической основой исследования не только астрономических, но и геологических и геофизических процессов.

В первой вводной главе приводятся сведения о теории вращения Земли. В ней дана кинематическая картина вращения Земли относительно центра масс и сформулированы задачи общей теории вращения Земли, учитывающей, во-первых, динамическую асимметричность и неуравновешенность Земли, во-вторых, динамическую связь между поступательным движением и вращением Земли, в-третьих, динамическую связь между общими пространственными движениями Земли, Луны, Солнца и больших планет Солнечной системы.

Теория динамических систем в метрических пространствах, ведущая свое начало от известных работ А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа, нашла плодотворное применение в небесной механике, и особенно в задаче трех тел. Но до настоящего времени эта теория не была использована в теории вращения Земли, впрочем, как и КАМ-теория.

Во второй главе даны основы теории динамических систем в метрических пространствах. После общих повятий приведены характеристики различных видов устойчивости движения. Помимо

этого, в главе рассматриваются общие свойства каждого вида движений и исследуется возможность распространения некоторых свойств движения, имевших место в прошлом, на будущее.

Третья глава посвящена устойчивости движения планетного варианта задачи n тел. В ней выявлены условия, при которых движение Солнечной системы описывается динамической системой (в смысле качественной теории дифференциальных уравнений). Установлен критерий устойчивости по Лагранжу и сформулировано условие рекуррентности движения. Наряду с этим рассматриваются проблемы резонанса движений планет Солнечной системы и минимальности по Биркгофу кинетической энергии движения тел Солнечной системы.

Четвертая глава содержит непосредственное изложение общей теории вращения Земли. Оно основано на предположениях и результатах, изложенных в предшествующих главах. В главе получено структурное решение задачи о движении модели Солнечной системы, исследовано предельное множество будущих состояний вращения Земли, а также получены средние значения элементов вращения Земли и установлен выход на предельный режим вращения, при котором порождаются вековые вариации элементов вращательного движения Земли. В этой же главе рассматривается механизм векового удаления Луны от Земли, а также свойства движения центров масс планет Солнечной системы вблизи неизменяемой плоскости Лапласа.

В пятой главе проведен численный анализ полученных результатов, основанный на современных моделях геопотенциала. Найдены соответствующие параметры векового движения полюса Земли, постоянные прецессии и нутации земной оси. Определены значения главных центральных моментов инерции Земли и расположение центрального эллипсоида ее инерции.

В Приложение вынесен весь вспомогательный материал, включающий основные понятия и краткие сведения из математического анализа, КАМ-теории и теории ньютонковского потенциала.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук В. Г. Демину за обсуждение книги и отдельных ее разделов, за ценные замечания и пожелания.

Основные сокращения и обозначения

\emptyset — пустое множество

$x \in X$ — x элементов множества X

$x \notin X$ — x не является элементом множества X

\bar{X} — замыкание множества X

$\{x \in X | P(x)\}$ — множество всех элементов из X , обладающих свойством P

σX — мера измеримого множества X

$X \subset Y$ — множество X составляет часть или совпадает с множеством Y

$X \cup Y$ — объединение множеств X и Y

$X \cap Y$ — пересечение множеств X и Y

$X \setminus Y$ — разность множеств X и Y

$X \Delta Y$ — симметрическая разность множеств X и Y

$S(\varepsilon, x)$ ($S[\varepsilon, x]$) — открытый (замкнутый) шар радиуса ε с центром в точке x

$B(X, \varepsilon)$ ($B[X, \varepsilon]$) — открытая (замкнутая) ε -окрестность множества X

$X \times Y$ — декартово произведение множеств X и Y

$f: X \rightarrow Y$ — отображение множества X в множество Y

$f(X)$ — образ множества X при отображении f

$C(X, Y)$ — множество всех непрерывных отображений множества X в множество Y

R_1 — действительная ось

R_1^+ — неотрицательная часть действительной оси

R_1^- — неположительная часть действительной оси

$\|x\|$ — норма элемента x нормированного пространства X

$C^n(R_1, M)$ — множество непрерывных вместе с n -й производной действительных функций на R_1 с значениями в метрическом пространстве M

R_n — n -мерное евклидово пространство

xu — скалярное произведение векторов x и u

$[xu]$ — векторное произведение векторов x и u

$\rho(x, y)$ — расстояние между элементами x и y метрического пространства M

$g(t, \cdot)$ — динамическая система

$X_t = g(t, X)$ — образ множества X относительно динамической системы

$g(t, q)$ — движение

$g(R_1, q)$ — траектория

$g(R_1^-, q)$ ($g(R_1^+, q)$) — отрицательная (положительная) полутраектория

$g(a \leq t \leq b, q)$ — отрезок траектории временной длины

$W(\alpha, g, q)$ ($W(\omega, g, q)$ или $W(\lambda, g, q)$) — множество α -предельных (ω - или λ -предельных) точек движения $g(t, q)$

$N(\alpha, g, q)$ ($N(\omega, g, q)$ или $N(\lambda, g, q)$) — множество собственных α -последовательностей (ω - или λ -последовательностей) движения $g(t, q)$

$V(g, q)$ — множество сдвигов движения $g(t, q)$

$V^-(g, q)$ ($V^+(g, q)$) — множество отрицательных (положительных) сдвигов движения $g(t, q)$

$\mathcal{N}(\alpha, \tilde{f})$ ($\mathcal{N}(\omega, \tilde{f})$ или $\mathcal{N}(\lambda, \tilde{f})$) — множество собственных α -последовательностей (ω - или λ -последовательностей) функции $f \in C(R_1, M)$

\mathcal{N}_f — множество направляющих последовательностей функции $f \in C(R_1, M)$

\mathcal{N}_f^- (\mathcal{N}_f^+) — множество отрицательных (положительных) направляющих последовательностей функции $f \in C(R_1, M)$

- Устойчиво L — устойчиво по Лагранжу.
 Устойчиво L^+ (L^-) — положительно (отрицательно) устойчиво по Лагранжу
 Устойчиво H — устойчиво по Пуассону
 Устойчиво H^+ (H^-) — положительно (отрицательно) устойчиво по Пуассону
 Возвращаемо B — возвращаемо по Биркгофу
 Возвращаемо B^+ (B^-) — положительно (отрицат.) возвращаемо по Биркгофу
 Сравнимо R^+ (R^-) — положительно (отрицат.) сравнимо по возвращаемости
 Сравнимо R — сравнимо по возвращаемости
 Сравнимо RR — равномерно сравнимо по возвращаемости
 $O^* \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ — инерциальная декартова прямоугольная система координат
 O^* — центр масс Солнечной системы
 $O^* X^* Y^* Z^*$ — инерциальная барицентрическая декартова прямоугольная система координат
 $O_1 X' Y' Z'$ — гелиоцентрическая кенигова декартова прямоугольная система координат
 $OXYZ$ — геоцентрическая кенигова декартова прямоугольная система координат
 $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ — геоцентрическая квазикенигова декартова прямоугольная система координат
 $Oxyz$ — система главных центральных осей инерции Земли
 $O\bar{r}\bar{\chi}$ — геоцентрическая сферическая система координат, жестко связанная с Землей
 φ, θ — углы Эйлера (см. далее рис. 1.4)
 K — кинетический момент вращения Земли относительно центра масс
 $K, \psi', \theta', \bar{\psi}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}$ — переменные Андуайе
 M_i — масса тела O_i Солнечной системы
 r_{ij} — расстояние между телами O_i и O_j Солнечной системы
 I_i — количество движения тела M_i
 S_i — главный вектор приложенных к телу M_i внешних сил
 Q — главный момент относительно центра масс Земли всех приложенных к ней внешних сил
 G — постоянная тяготения
 k^2 — постоянная Гаусса
 κ — вектор Лапласа
 e_1, e_2, e_3 — проекция вектора Лапласа на координатные оси системы $O^* X^* Y^* Z^*$
 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ — постоянные площадей
 h — постоянная энергии
 ω — угловая скорость вращения Земли
 H — гамильтониан
 T — кинетическая энергия
 I — полярный момент инерции Солнечной системы
 A', B', C' — осевые моменты инерции Земли
 D, E, F — центробежные моменты инерции Земли
 A, B, C — главные центральные моменты инерции Земли
 p, q, r — проекции вектора ω угловой скорости Земли на главные оси инерции
 K_x, K_y, K_z — проекции вектора K кинетического момента вращения Земли относительно ее центра масс на главные оси инерции
 $\mathcal{P}(f)$ — интегральное среднее значение функции f

Глава первая

Введение

Здесь приводятся краткие сведения о возникновении и становлении теории вращения Земли относительно ее центра масс как проблемы теоретической и небесной механики. Они включают данные и о специальных астрономических службах систематического наблюдения за элементами вращательного движения Земли, таких, как Международная служба движения полюсов, Международное бюро времени и др. Вводятся основные системы отсчета и переменные, определяющие пространственное положение планеты. Рассматривается кинематическая картина невозмущенного вращения Земли в углах Эйлера и в переменных Андуайе. Интерпретация такого движения в переменных Андуайе, помимо наглядности, обнаруживает простоту записи и удобства решения задачи. В заключение главы ставятся задачи общей теории вращения Земли и соответствующие им математические формализации.

1. Краткие исторические сведения

Вращательное движение Земли характеризуется следующими основными элементами: прецессией и нутацией земной оси, движением полюса Земли и изменением продолжительности звездных суток.

Прецессия земной оси, обуславливающая наблюдаемое монотонное возрастание эклиптических долгот звезд со скоростью около $50''$ за столетие, была открыта Гиншархом более 2000 лет назад [66, 118]. Динамическое объяснение прецессии земной оси впервые дано И. Ньютоном в его работе «Математические начала натуральной философии» (см. также [50, 128]).

Нутация земной оси обуславливается изменением угла наклона плоскости земного экватора к плоскости эклиптики. Она была открыта Э. Брадлеем в 1748 г. [118, 128]. Через год Д'Аламбер [92] дал объяснение этому явлению, основанное на динамической теории вращения Земли. Он изложил теорию прецессии и нутации земной оси, впервые указав условия равновесия твердого тела в их аналитической форме. Последние с учетом динамического принципа, носящего ныне имя Д'Аламбера, позволили ему записать уравнения вращательного движения Земли. Однако эти уравнения сложны по форме и неудобны для анализа их решения, более того, непригодны для исследования других элементов осевого вращения Земли.

Теория прецессии и нутации земной оси, существенно превосходящая теорию Д'Аламбера по математической форме, постро-

на Л. Эйлером [86, 87]. Теория имела также приближенный характер, но вполне согласующийся с данными астрономических наблюдений того времени. Она возникла в связи с решением задачи о причинах предварения равноденствий и впоследствии легла в основу общей теории вращательного движения твердого тела с одной неподвижной точкой, построенной Эйлером в петербургский период его научной деятельности и опубликованной в двухтомном трактате [96].

Теория прецессии и нутации оси вращения Земли относительно центра масс в ее окончательной форме, излагаемой и ныне, принадлежит Л. Эйлеру. Она опубликована в 1769 г. под названием «Подробное исследование явлений, которые могут производиться в суточном вращении Земли силами небесных тел» [86]. В этой работе, помимо прецессии и нутации земной оси, Эйлер рассматривает движения полюса Земли и устанавливает причину свободного периода.

Теория прецессии и нутации получила дальнейшее развитие в конце прошлого века в работах П. Опшольцера, Ф. Тиссерана, Г. Хилла, С. Ньюкома и др. авторов (см. [35, 47, 70]). Оно заключалось в уточнении и учете последующих членов тригонометрических рядов, представляющих собой правые части дифференциальных уравнений для углов прецессии и нутации.

Согласно Эйлеру [96], в выражениях проекций действующих на Землю моментов сил на главные оси инерции Земли главные члены разложений в тригонометрические ряды имеют вид

$$\begin{aligned} Q_x &= -3Ga \left(\frac{M_1}{s_1^3} \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \frac{M_2}{s_2^3} \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \right), \\ Q_y &= -3Gb \left(\frac{M_1}{s_1^3} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \frac{M_2}{s_2^3} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 \right), \\ Q_z &= -3Gc \left(\frac{M_1}{s_1^3} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \frac{M_2}{s_2^3} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \right), \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где M_1 и M_2 — массы Луны и Солнца; s_1 и s_2 — модули радиусов-векторов Луны и Солнца; $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$ и $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$ — их направляющие косинусы.

Величины a , b и c выражаются через главные центральные моменты инерции Земли, причем принято $a=b$, $c=0$. Величины Q_x , Q_y и Q_z вычислялись как проекции момента сил притяжения Земли материальными точками — Луной и Солнцем — с постоянными по величине радиусами-векторами s_1 и s_2 . Причем свою систему динамических и кинематических уравнений Л. Эйлер подвергал приближенному интегрированию, рассматривая величину a в качестве малого параметра. Она действительно мала, ибо $a = (C-A)/C$, где A и C — осевой и экваториальный моменты инерции Земли.

При этих упрощениях переход от динамических и кинематических уравнений Эйлера к уравнениям прецессии и нутации

земной оси привел к окончательной форме известных уравнений Пуассона [118]. Они положены в основу теории вращения Земли относительно центра масс, опубликованной Э. Вулардом [128] и принятой Международным астрономическим союзом (МАС) в качестве *стандартной теории*.

Дальнейшее совершенствование стандартной теории с учетом современных представлений о гравитационном поле Земли связано с работами Х. Киношита, опубликованными в период с 1969—1977 гг. Киношита предложил теорию вращения Земли относительно центра масс, основанную на дифференциальных уравнениях вращения Земли в переменных Алдуайе [90]. При выводе правых частей этих уравнений он исходил из модели геопотенциала SE-3 серии «Стандартная Земля». Как и предшествующая, эта теория является теорией прецессии и нутации оси вращения Земли относительно центра масс.

Отметим, что как стандартная теория, так и ее модификации остаются ограниченными по постановке, методам анализа и решения.

Вращательное движение Земли, помимо прецессии и нутации ее оси, порождает движение полюсов и *непостоянство* продолжительности звездных суток. Прошло около века со времени предсказания Л. Эйлером движения полюсов Земли, до того, как в 1842 г. Х. Петерс и Ф. Бессель провели первые астрономические наблюдения за этим движением. Но результаты были разочаровывающими — установлены малые вариации широт в пределах точности измерения. Изменяемость широт впервые надежно определена Ф. Кюстнером в 1884 г. [46].

Открытие *свободного периода Эйлера* принадлежит С. Чандлеру, проводившему специальные наблюдения за движением полюса. В результате было установлено движение полюса Земли с периодом в 405—430 средних солнечных суток, получившее название *чандлеровского* [110].

Интерес к этим открытиям привел к созданию Международной службы широты (МСШ), имеющей пять станций, расположенных на широте $39^{\circ}08'$ с. ш., переименованную впоследствии в Международную службу движения полюсов (МСДП). В 1920 г. в Париже было создано Международное бюро времени (МБВ) с восемью обсерваториями. Эти две международные организации, помимо своих основных программ, имеют общую программу наблюдений, подчиненную целям выявления вековых вариаций движения полюса и продолжительности звездных суток — суточного вращения Земли.

Вековое движение полюса Земли представляет собой смещение среднего полюса эпохи относительно среднего положения полюса за период 1900—1905 гг., названного условным международным началом (УМН). При этом УМН определяется как точка, равноудаленная от зенитов упомянутых пяти станций МСДП [89]. Однако Е. П. Федоров [79] показал, что такой точки вообще не существует. Им же было показано, что УМН удовлетворяет

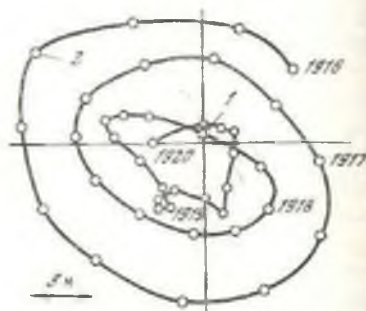
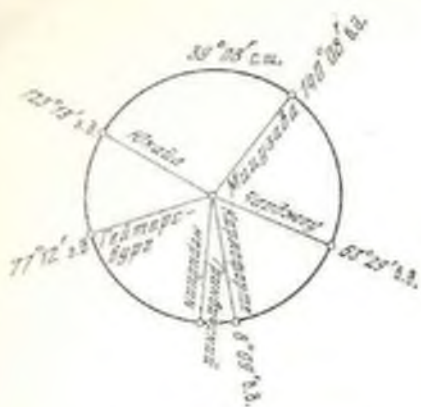


Рис. 1.1. Схема расположения станций МСДП

Рис. 1.2. Траектория движения полюса Земли по данным станций МСДП с 1916—1920 гг.

1 — УМН, 2 — СНЭ



Рис. 1.3. Траектория векового движения полюса Земли по данным станций МСДП с 1903—1968 гг.

Шкалы x и y соответствуют направлениям Гринвичского меридиана и Запада соответственно. Цифры на кривой соответствуют двум последним цифрам годов

условиям минимальности

$$\sum_{i=1}^n [(\psi_{i0} - \psi_i) + (x_c \cos \lambda_i + y_c \sin \lambda_i)]^2 = \min, \quad (1.1.2)$$

где x_c и y_c — координаты мгновенного полюса Земли, ψ_{i0} — начальное значение средней широты, а ψ_i — значение мгновенной широты i -й станции МСДП (рис. 1.1).

Если в (1.1.2) величины ψ_{i0} заменить средними значениями широт эпохи наблюдений, то полученное соотношение будет

определять *средний полюс эпохи* (СПЭ), или *средний полюс Орлова* (рис. 1.2). УМН и СПЭ не совпадают, и это относительное изменение (СПЭ) называют *вековым движением полюсов Земли*. Оно связано с медленным вековым изменением широт станций МСДП (рис. 1.3).

Неравномерность изменения продолжительности суток, определяемого сидерическим периодом вращения Земли, устанавливается на базе равномерной шкалы абсолютного времени.

С введением шкалы атомного времени стало возможным детальное изучение неравномерности вращения Земли и выделение ее основных составляющих. Оказалось, что эта неравномерность вращения Земли относительно центра масс состоит из периодического колебания, условно подразделяемого на долгопериодические, сезонные и короткопериодические вариации, из нерегулярного изменения, содержащего скачкообразное изменение скорости вращения, и, наконец, из неперiodического изменения с вековым замедлением скорости.

2. Кинематика вращательного движения Земли в углах Эйлера и переменных Андуайе

Обозначим через $O^*\xi\eta\zeta$ правую декартову прямоугольную инерциальную систему координат. Выберем систему $Oxyz$ главных центральных осей инерции, невращающуюся (кепигову) систему $OXYZ$ и промежуточную подвижную (квазикепигову) систему $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ с общим началом O в центре масс Земли. Координатные оси кепиговой системы $OXYZ$ направим параллельно одноименным координатным осям инерциальной системы $O^*\xi\eta\zeta$.

Координатную ось $O\bar{Z}$ квазикепиговой системы направим по вектору K кинетического момента вращения Земли относительно ее центра масс. Пусть положительная координатная ось $O\bar{X}$ ортогональна плоскости осей $O\bar{Z}$ и $O\bar{Y}$ и совмещена с положительным направлением вращения от оси $O\bar{Z}$ к $O\bar{Y}$. При этом положительная координатная ось $O\bar{Y}$ дополняет ось $O\bar{Z}$ и $O\bar{X}$ до правой системы.

Взаимное расположение систем координат $OXYZ$, $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ и $Oxyz$ зададим при помощи углов Эйлера

$$\psi = (OX, L), \quad \varphi = (L, Ox), \quad \theta = (OZ, Oz), \quad (1.2.1)$$

$$\bar{\psi} = (O\bar{X}, L), \quad \bar{\varphi} = (\bar{L}, Ox), \quad \bar{\theta} = (O\bar{Z}, Oz), \quad (1.2.2)$$

$$\psi' = (OX, R), \quad \varphi' = (R, O\bar{X}) = 0, \quad \theta' = (OZ, O\bar{Z}), \quad (1.2.3)$$

где прямые L , \bar{L} , R , представляющие собой линии пересечения соответствующих пар координатных плоскостей Oxy , OXY ; Oxy , $O\bar{X}\bar{Y}$; OXY , $O\bar{X}\bar{Y}$, называются *линиями узлов* [6, 26].

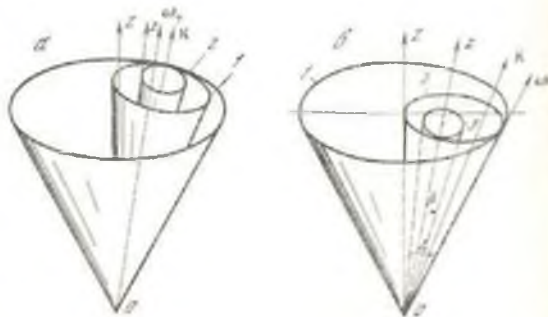
Углы Эйлера (1.2.1) определяют положение Земли, рассматриваемой как абсолютно твердое тело относительно системы отсчета $O^*\xi\eta\zeta$ с неизменными по направлению координатными осями в неподвижном пространстве (рис. 1.4, а). Углы Эйлера ψ , φ



Рис. 1.4. Расположение систем координат $OXYZ$ и $Oxuz$ (а), $OXYZ$ и $Oxuz$ (б) и $OXYZ$ и $OX'YZ'$ (в)

Рис. 1.5. Геометрическая интерпретация вращения Земли по Пуансо (а) и в переменных Андуйе (б)

а: 1, 2 — неподвижный и подвижный аксоиды соответственно; б: 1—3 — неподвижный, промежуточный и подвижный аксоиды соответственно



и θ соответственно называются углами *прецессии*, *собственного вращения* и *нутаии* Земли.

Углы (1.2.2) и (1.2.3) представляют собой угловые переменные Андуйе [90] (см. рис. 1.4, б, в), введенные А. Депри [21], В. В. Белецким [11, 12] и Ф. Л. Черноушко [83].

Обозначим через ω вектор угловой скорости вращения Земли. Пусть $p, q, r; \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ и p', q', r' — проекции вектора ω на координатные оси систем $Oxuz, OXYZ$ и $OXYZ$ соответственно.

Введем орты e_x, e_y, e_z положительных направлений осей системы $Oxuz$, e_x, e_y, e_z — орты кенигсовой системы $OXYZ$, а e, l — орты линий узлов L и R соответственно.

Дадим следующие определения. Ось Oz — ось *собственного вращения* и в соответствии с этим угловая скорость ψe_z — *угловая скорость собственного вращения* Земли. Ось OZ — ось *прецессии*, а угловая скорость $\dot{\psi} e_z$ — *угловая скорость прецессии* Земли. Линия узлов L — ось *нутаии* и угловая скорость $\dot{\theta} e$ — *угловая скорость нутаии* Земли. Вектор ω можно представлять в виде

$$\omega = \dot{\psi} e_z + \dot{\theta} e + \dot{\phi} e. \quad (1.2.4)$$

Прецессию произвольного твердого тела называют *прямой*, если угол между векторами его угловых скоростей прецессии и собственного вращения острый, *обратной* — если этот угол тупой. Прецессия земной оси является *обратной* [6, 50].

Геометрически вращение Земли относительно центра масс сводится к качению без скольжения конуса с осью Oz по конусу с осью OZ (рис. 1.5, а). Угол θ между осями упомянутых конусов, называемых аксондами, изменяется со скоростью $\dot{\theta}e$. Конус, осью которого является ось прецессии, называется *конусом прецессии*. Конус прецессии остается неподвижным, поэтому его называют также *неподвижным конусом*. Конус с осью Oz вращается вокруг своей оси и катится по конусу прецессии, касаясь его по некоторой линии, показанной штрихом. Линия касания имеет направляющий вектор ω , равный сумме угловых скоростей прецессии и собственного вращения Земли:

$$\omega_r = \dot{\psi} e_z + \dot{\varphi} e_z.$$

Отметим, что при этом подвижный конус располагается внутри конуса прецессии.

Углы при вершинах α и β конуса прецессии и подвижного конуса (см. рис. 1.5, б) определяются согласно уравнениям (1.2.4) по формулам

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{e_z \cdot \omega_r}{\omega_r}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{e_z \cdot \omega_r}{\omega_r}. \quad (1.2.5)$$

Пусть k_1, k_2, k_3 — орты координатных осей квазикенигмовой системы $OXYZ$ и k — орт положительного направления линии узлов L . Тогда вектор ω угловой скорости вращения Земли можно представить суммой

$$\omega = \dot{\psi} k_2 + \dot{\varphi} e_z + \dot{\theta} k + \dot{\psi}' e_z + \dot{\theta} l. \quad (1.2.6)$$

Обозначим

$$\omega_1 = \dot{\psi} k_2 + \dot{\varphi} e_z + \dot{\theta} k, \quad (1.2.7)$$

$$\omega_2 = \dot{\psi}' e_z + \dot{\psi}' k_2 + \dot{\theta} l, \quad (1.2.8)$$

где в силу выбора системы $OXYZ$ величина $\dot{\psi}' = 0$.

Сначала рассмотрим вращение Земли с угловой скоростью ω_1 (1.2.7). Геометрически оно сводится к качению без скольжения внутреннего подвижного конуса, вращающегося вокруг оси Oz со скоростью $\dot{\varphi} e_z$, по конусу прецессии — со скоростью $\dot{\psi} k_2$. При этом конус прецессии имеет своей осью координатную ось OZ , иначе говоря, ось, определяемую вектором K . Угол θ между осями внутреннего подвижного конуса и конуса прецессии претерпевает изменение со скоростью $\dot{\theta} l$. Углы при вершине α_1, β_1 упомянутых конусов определяются из равенств

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{k_2 \cdot \omega_{r1}}{\omega_{r1}}, \quad \cos \frac{\beta_1}{2} = \frac{e_z \cdot \omega_{r1}}{\omega_{r1}},$$

$$\omega_{r1} = \dot{\psi} k_2 + \dot{\varphi} e_z. \quad (1.2.9)$$

Очевидно, вектор (1.2.7) прецессирует с угловой скоростью $\dot{\psi}'\mathbf{e}_z$. Пусть при этом угол θ' между \mathbf{e}_z и \mathbf{k}_z изменяется со скоростью $\dot{\theta}'$. Такое движение осуществляется как качение без скольжения подвижного конуса с осью Oz по конусу прецессии с осью, коллинеарной ω_1 . Кинематическая картина этого движения приведена на рис. 1.5, б.

Фактическое вращение Земли представляет собой движение по Эйлеру—Пуансо, возмущаемое силами ньютоновского притяжения Земли Луной, Солнцем и большими планетами Солнечной системы. Невозмущенное вращение Земли относительно ее центра масс по Эйлеру—Пуансо описывается как системой кинематических и динамических уравнений Эйлера, так и дифференциальными уравнениями в переменных Андуайе [93, 94].

Запишем дифференциальные уравнения вращательного движения Земли по Эйлеру—Пуансо:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0, \quad C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0, \quad (1.2.10)$$

$$p = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$q = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad (1.2.11)$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции Земли, причем $A < B < C$.

Уравнения (1.2.10) и (1.2.11) соответственно называются *динамическими* и *кинематическими уравнениями Эйлера*.

Допустим, что система уравнений (1.2.10) имеет следующие начальные условия:

$$p(t_0) = p_0, \quad q(t_0) = q_0, \quad r(t_0) = r_0, \quad (1.2.12)$$

где $t = t_0$ — начальный момент времени.

Дифференциальные уравнения (1.2.10) имеют два первых интеграла

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \quad (1.2.13)$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2, \quad (1.2.14)$$

где K — модуль вектора \mathbf{K} , h — постоянная энергии.

Значения констант h и K определяются начальными условиями (1.2.12).

Интеграл (1.2.13) называется *интегралом энергии*, причем его левая часть равна удвоенной кинетической энергии вращения Земли, (1.2.14) — *интеграл площадей*.

Введем новые постоянные λ и μ согласно равенствам

$$\lambda = \sqrt{\frac{K^2 - Ah}{B(B-A)}}, \quad \mu = \sqrt{q_0^2 + \frac{A(C-A)}{B(C-B)}p_0^2} \quad (1.2.15)$$

и определим их значения, соответствующие начальным условиям (1.2.12):

$$\lambda = \sqrt{q_0^2 + \frac{C(C-A)}{B(B-A)} r_0^2}, \quad \mu = \sqrt{q_0^2 + \frac{A(C-A)}{B(C-B)} r_0^2}. \quad (1.2.16)$$

С учетом обозначений (1.2.15) рассмотрим выражения (1.2.13), (1.2.14) как систему относительно величин p и r :

$$p = \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)} (\mu^2 - q^2)}, \quad q = \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)} (\lambda^2 - q^2)}. \quad (1.2.17)$$

Подставив соотношения (1.2.17) во второе уравнение системы (1.2.10), получим дифференциальное уравнение относительно компоненты q вектора ω

$$dq/dt = \sqrt{(B-A)(C-B)/AC} \sqrt{(\lambda^2 - q^2)(\mu^2 - q^2)}. \quad (1.2.18)$$

Соотношение (1.2.18) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и интегрируя его, найдем

$$at + b = \int_0^q ds / \sqrt{(\lambda^2 - s^2)(\mu^2 - s^2)}, \quad (1.2.19)$$

где b — постоянная интегрирования и

$$a = \sqrt{(B-A)(C-B)/AC}. \quad (1.2.20)$$

Положим $\bar{\lambda} = \mu\lambda^{-1}$ и $q = \mu \sin v$. Отметим, что значения (1.2.16) при начальных условиях (1.2.12) удовлетворяют неравенству $\lambda > \mu$. Тогда правая часть выражения (1.2.19) сведется к эллиптическому интегралу первого рода

$$at + b = \int_0^v dv / \sqrt{1 - \bar{\lambda}^2 \sin^2 v}. \quad (1.2.21)$$

Интеграл (1.2.21) позволяет построить зависимость $q(t)$ через эллиптический синус Якоби

$$q = \mu \operatorname{sn}(\lambda at + c_0), \quad c_0 = q_0 \mu^{-1}. \quad (1.2.22)$$

Напомним, что эллиптические функции Якоби связаны тождествами

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad \operatorname{dn} x = \sqrt{1 - \bar{\lambda}^2 \sin^2 v}. \quad (1.2.23)$$

Подставив формулу (1.2.22) с учетом выражений (1.2.23) в соотношения (1.2.17), получим следующее решение динамических уравнений Эйлера (1.2.10), удовлетворяющее начальным условиям (1.2.12):

$$\begin{aligned} p &= \mu \sqrt{B(C-B)/A(C-A)} \operatorname{cn}(\lambda at + c_0), \\ q &= \mu \operatorname{sn}(\lambda at + c_0), \\ r &= \lambda \sqrt{B(B-A)/C(C-A)} \operatorname{dn}(\lambda at + c_0). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

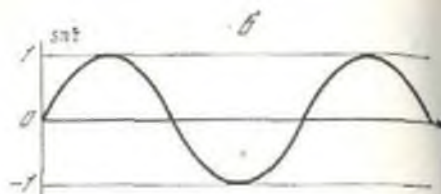
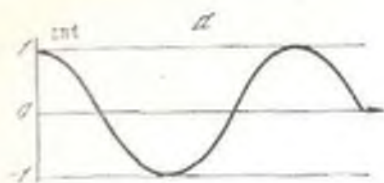


Рис. 1.6. Графики эллиптических функций Якоби $\text{sn } t$ (а), $\text{sn}' t$ (б) и $\text{dn } t$ (в)



Эллиптические функции Якоби являются периодическими функциями с периодом $4K$, где K выражается полным эллиптическим интегралом первого рода

$$\mathcal{P} = 4K/\lambda a. \quad (1.2.25)$$

Величина (1.2.25) периода вращения динамически асимметричной Земли по инерции есть свободный период Эйлера.

Графики функций $\text{sn } t$, $\text{sn}' t$ и $\text{dn } t$, входящих в выражения (1.2.24), приведены на рис. 1.6.

Если $A=B$ (динамически симметричная Земля), как это принято в стандартной теории [128], то последнее из динамических уравнений Эйлера дает первый интеграл

$$r(t) = r_0, \quad r_0 = \text{const}. \quad (1.2.26)$$

Геометрически интеграл (1.2.26) означает, что вектор угловой скорости ω вращения динамически симметричной Земли по инерции имеет постоянную проекцию на ось динамической симметрии Oz . С учетом (1.2.26) из (1.2.13) и (1.2.14) получим

$$p^2 + q^2 = (h - Cr_0^2)/A, \quad K^2 - C^2 r_0^2 = A(h - Cr_0^2). \quad (1.2.27)$$

Заметим, что из (1.2.26), (1.2.27) вытекает постоянство модуля ω угловой скорости, ибо

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \omega_0^2. \quad (1.2.28)$$

Как известно, уравнение (1.2.27) определяет прямой цилиндр с осью Oz и сечением радиуса

$$R_0 = \sqrt{(h - Cr_0^2)/A}. \quad (1.2.29)$$

В частности, полюс динамически симметричной Земли движется по окружности радиуса R_0 (1.2.29), равного нулю тогда и только тогда, когда при $t=t_0$ величины p_0 и q_0 суть нули. Последнее и означает, что вращение происходит именно вокруг оси Oz динамической симметрии Земли [80] (см. рис. 1.5, а).

Определим величину угловой скорости ω вращения Земли, положив $A \neq B$ (динамически асимметричная Земля). Для этого (1.2.24) возведем в квадраты и сложим, тогда

$$\omega = \left[\mu^2 \frac{B(C-B)}{A(C-A)} \operatorname{cn}^2(\lambda at + c_0) + \mu^2 \operatorname{sn}^2(\lambda at + c_0) + \lambda^2 \frac{B(B-A)}{C(C-A)} \operatorname{dn}^2(\lambda at + c_0) \right]^{1/2}. \quad (1.2.30)$$

Это соотношение показывает, что величина угловой скорости вращения Земли по инерции имеет действительный период, равный половине свободного периода Эйлера (1.2.25).

Заметим, что функция $\omega(t)$ в период (1.2.25) дважды достигает максимума и минимума. Укажем соответствующие этому моменты времени. С этой целью перенишем соотношение (1.2.30) в виде

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{B(C-B)}{A(C-A)} \mu^2 + \frac{B(B-A)}{C(C-A)} \lambda^2 - \frac{(B-A)(C-B)}{AC} q^2, \quad (1.2.31)$$

Здесь коэффициенты $B(C-B)/A(C-A)$, $B(B-A)/C(C-A)$, $(B-A)(C-B)/AC$ при величинах μ^2 , λ^2 и q^2 положительны. Поэтому функция $\omega^2(t)$ имеет максимум при $q=0$ и минимум, когда q достигает максимума. Следовательно, величина угловой скорости вращения Земли по инерции достигает максимума, когда угловая скорость ω проходит через координатную плоскость Oxz , и минимума, когда она проходит через координатную плоскость Oyz .

Чтобы получить полную кинематическую картину невозможного вращения Земли, необходимо проинтегрировать кинематические уравнения Эйлера (1.2.11).

При изложенном выборе систем отсчета $OXYZ$ и $Oxyz$ решение этой задачи сопряжено с рядом трудностей. Ее легче решить в переменных Андуайе. Поэтому запишем дифференциальные уравнения вращения Земли по инерции в переменных Андуайе [30, 95]:

$$dK/dt=0, \quad d\psi'/dt=0, \quad d\theta'/dt=0, \\ d\bar{\varphi}/dt = K(\sin^2 \bar{\varphi}/A + \cos^2 \bar{\varphi}/B), \quad (1.2.32)$$

$$d\bar{\theta}/dt = K \cos \bar{\theta} (1/C - \sin^2 \bar{\varphi}/A - \cos^2 \bar{\varphi}/B), \quad (1.2.33)$$

$$d\bar{\theta}'/dt = K \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} (1/A - 1/B).$$

Системы уравнений (1.2.32), (1.2.33) расщепляются на две подсистемы, причем уравнения (1.2.32) имеют очевидное решение

$$K(t) = K_0, \quad \psi'(t) = \psi'_0, \quad \theta'(t) = \theta'_0, \quad (1.2.34)$$

где K_0 , ψ'_0 , θ'_0 — произвольные постоянные величины.

Решение (1.2.34) выражает постоянство вектора \mathbf{K} в пространстве относительно системы $OXYZ$. Рассмотрим проекции вектора \mathbf{K} на координатные оси системы $Oxyz$ и выразим их через переменные Андуйе:

$$Ap = K \sin \bar{\psi} \sin \bar{\theta}, \quad Bq = K \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\theta}, \quad Cr = K \cos \bar{\theta}. \quad (1.2.35)$$

Из первых двух формул (1.2.35) находим

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = Ap/Bq.$$

Подставляя сюда выражения (1.2.24), получим

$$\bar{\varphi}(t) = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{B(C-B) \operatorname{cn}(\lambda at + c_0)}{A(C-A) \operatorname{sn}(\lambda at + c_0)}} \right]. \quad (1.2.36)$$

Последняя из формул (1.2.35) с учетом (1.2.34) дает

$$\bar{\theta}(t) = \arccos \left[\frac{C\lambda}{K_0} \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}} \operatorname{dn}(\lambda at + c_0) \right]. \quad (1.2.37)$$

Кинематические уравнения для $\bar{\psi}(t)$ выводятся в следующей главе. Выражение для этой переменной имеет вид

$$\bar{\psi}(t) = K_0 \int_0^t \frac{(C-B) + (B-A) \operatorname{sn}^2(\lambda at + c_0)}{A(C-B) + (B-A)C \operatorname{sn}^2(\lambda at + c_0)} dt + \bar{\psi}_0. \quad (1.2.38)$$

Таким образом, для переменных Андуйе получены явные выражения (1.2.34), (1.2.36)–(1.2.38) как функции независимой переменной t .

Отметим некоторые особенности вращения динамически асимметричной Земли. Предварительно вычислим интеграл (1.2.38) при $A=B$ и переменные $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, соответствующие этому случаю, обозначив их

$$\bar{\psi}_c = \frac{K_0}{A} t + \bar{\psi}_{c0}, \quad \bar{\varphi}_c = \left(r_0 - \frac{K_0}{A} \cos \bar{\theta}_{c0} \right) t + \bar{\varphi}_{c0}, \quad \bar{\theta}_c = \bar{\theta}_{c0}, \quad (1.2.39)$$

где $\bar{\psi}_{c0}$, $\bar{\varphi}_{c0}$, $\bar{\theta}_{c0}$ — постоянные интегрирования.

Величину периода (1.2.25) при $A=B$ обозначим

$$\Psi_c = \frac{2\pi}{r_0} \frac{A}{C-A}. \quad (1.2.40)$$

Формулы (1.2.39) показывают, что вращение по инерции динамически симметричной Земли происходит с постоянной по величине угловой скоростью (1.2.28) и представляет собой регулярную прецессию относительно вектора \mathbf{K} , ибо

$$\begin{aligned} d\bar{\psi}_c/dt &= K_0/A = \operatorname{const}, \\ d\bar{\varphi}_c/dt &= r_0 - K_0 \cos \bar{\theta}_{c0}/A = \operatorname{const}, \quad d\bar{\theta}_c/dt = 0. \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

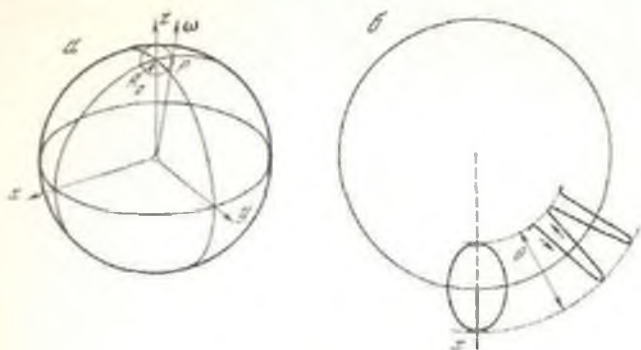


Рис. 1.7. Трасектории движения полюса динамически симметричной (а) и асимметричной (б) Земли при ее вращении по Пуансо на касательной плоскости. Ось x — направление Гринвичского меридиана, θ — угол нутации. Стрелками показано направление движения полюса

При этом полюс Земли P описывает на земной поверхности окружность (1.2.27) радиуса R , и по истечении промежутка времени (1.2.40) возвращается в исходное положение (рис. 1.7, а).

Запишем уравнение следа вектора ω невозмущенного вращения Земли на плоскости:

$$z = b, \quad (1.2.42)$$

где b — полярный радиус Земли.

Прямая с направляющим вектором ω , проходящая через центр масс Земли, в системе $Oxyz$ имеет уравнение

$$x/p = y/q = z/r$$

и на плоскости (1.2.42) определяет точку с координатами

$$x_E = bp/r, \quad y_E = bq/r. \quad (1.2.43)$$

Очевидно, точка совпадает со следом вектора ω на плоскости (1.2.42). Составим уравнение геометрического места всех таких точек. Оно имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}(p/r)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}(q/r)^2} = b^2 \quad (1.2.44)$$

и определяет эллипс, длины полуосей которого меняются со временем в соответствии с выражениями (1.2.24) (рис. 1.7, б).

Прецессия динамически асимметричной Земли даже при вращении только по инерции отлична от регулярной (1.2.41), причем скорости прецессии и собственного вращения непостоянны, т. е. существует нутационное колебание оси вращения Земли по закону (1.2.37).

Для одних и тех же начальных условий (1.2.12) величины Ψ , Ψ_c равны

$$\Psi \simeq \frac{2\pi}{r_0} \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}, \quad \Psi_c = \frac{2\pi}{r_0} \frac{A}{C-A}.$$

Следовательно, $\Psi > \Psi_c$. Это означает, что свободный период Эйлера для динамически асимметричной Земли ($A \neq B$) больше свободного периода для динамически симметричной Земли ($A = B$).

Таким образом, кинематическая картина невозмущенного вращения Земли по инерции характеризуется некоторым периодическим движением. В дальнейшем будет показано, что накладываемое на это движение возмущение, вызываемое приложенным к Земле моментом сил, лишь слегка нарушает периодичность. При этом невозмущенное периодическое вращательное движение Земли деформируется в почти периодическое.

3. Постановка задач общей теории вращения Земли

Общее движение Земли, рассматриваемой как динамически асимметричное абсолютно твердое тело, представимо суммой ее поступательного перемещения вместе с центром масс и вращения относительно этого центра масс. Составляющие такого движения определяются основными теоремами динамики. Между поступательным и вращательным движением Земли имеется взаимосвязь. Она существенно влияет на эволюцию движения Земли и особенно важна при исследовании малых эффектов, проявляющих себя на длительных интервалах времени. Земля в своем движении динамически связана с окружающими небесными телами. Она взаимно притягивается по закону Ньютона Луной, Солнцем и большими планетами. Последние взаимодействуют между собой. Тем самым обуславливается эволюция поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы. Следовательно, эволюция движения Земли неразрывно связана с эволюцией движения тел Солнечной системы. Кроме того, эволюция геологических и других процессов в истории реальной Земли сопровождается массообменом в недрах Земли и связанным с ним эффектом динамической неуравновешенности Земли.

Таким образом, постановка задач общей теории вращения Земли должна предусмотреть, во-первых, динамические асимметричность и неуравновешенность Земли, во-вторых, связь между поступательным движением и вращением Земли, в-третьих, динамическую связь между общими пространственными движениями тел Солнечной системы с учетом предыстории их движения.

Данные астрономических наблюдений на станциях МСДП после исключения из них годового и чандлеровского колебаний полюса имеют некоторый остаток. Этот остаток данных, который не учитывается, ряд авторов объясняют возможной вековой составляющей движения полюса. Исследование векового движения

полюса является одной из основных задач общей теории вращения Земли. Изменения скорости осевого вращения Земли обнаруживаются при сравнении шкалы всемирного времени с равномерной шкалой атомного времени. Выявлены вековые и нерегулярные изменения скорости вращения Земли.

Таким образом, вековые вариации может иметь каждый из элементов вращательного движения Земли. Однако в рамках постановки существующих теорий вращения Земли вопрос о вековых вариациях остается открытым [93, 114]. Поэтому постановка задач общей теории вращения Земли должна включать исследование вековых вариаций элементов вращательного движения Земли.

Сформулируем задачи общей теории вращения Земли. Рассматривается модель Солнечной системы. Она включает Землю как абсолютно твердое тело с трехосным центральным эллипсоидом инерции, Луну, Солнце и большие планеты Солнечной системы как материальные точки. Эти небесные тела взаимно притягиваются по закону Ньютона, их положения и скорости движения предполагаются известными в некоторый момент времени $t = 0$, принятый за начало отсчета. Это — начальные условия соответствующей задачи Коши. Предполагается также, что Земля во все время рассмотрения вращается с такой угловой скоростью ω , что проекция вектора ω на направление оси Oz остается положительной, т. е.

$$\inf_{t \in R} r(t) = r_{\text{inf}} > 0, \quad (1.3.1)$$

и для некоторого момента \bar{t} действительной оси времени R , выполнено условие

$$\omega(\bar{t}) = r(\bar{t}). \quad (1.3.2)$$

При указанных исходных данных требуется провести качественное исследование поступательно-вращательного движения модели Солнечной системы в целом и эволюции вращения Земли. Это позволит, в частности, дать ответ на вопрос о существовании вековых вариаций элементов вращения Земли и их параметрах, построить аналитический метод определения постоянных прецессии и нутации земной оси.

Следует отметить, что условия (1.3.1) и (1.3.2) не являются принципиальными. Действительно, если в некоторый момент времени $t^* \in R_+^+$ величина $r(t^*) \leq 0$, то это означает, что либо угловая скорость вращения Земли обращается в нуль ($\omega(t^*) = 0$), либо полюс Земли испытывает вековое движение и перемещается от нынешнего его положения до положения, совпадающего с современным положением экваториальной плоскости. Астрономические наблюдения показывают, что равенство (1.3.2) выполняется без каких-либо заметных отклонений. Поэтому вопрос о существовании вековых вариаций вращения Земли необходимо решать именно при условиях (1.3.1), (1.3.2).

Таблица 1.1

Небесное тело	Масса, от % от Солнца	Средняя орбитальная скорость, км/сек	Большая полуось орбиты, а. е. е.	Эксцентриситет орбиты	Период обращения, сут	Средняя температура, град	Средняя скорость вращения, град/сут	Число спутников планет
Солнце	332 958	696 000	—	—	25,36	—	—	—
Меркурий	0,06	2 439	0,387	0,206	58,60	7,0	0,24	—
Венера	0,82	6 051	0,723	0,007	243,00	3,4	0,62	—
Земля	1,00	6 378	1,000	0,017	1,00	0	1,00	1
Марс	0,11	3 394	1,524	0,093	1,03	1,9	1,88	2
Юпитер	318	71 398	5,203	0,048	0,41	1,3	11,86	14
Сатурн	95,1	60 000	9,539	0,056	0,43	2,5	29,46	15
Уран	14,5	25 400	19,182	0,047	1,00	0,8	84,01	6
Нептун	17,3	24 750	30,058	0,009	0,92	1,8	164,8	2
Плутон	0,002	1 400	39,439	0,250	6,40	17,2	247,7	1
Луна	0,0123	1 738	3,84·10	0,055	27,32	5,09	0,0748	—

Примечание. За единицу принята масса Земли. Для Луны приведен средний экваториальный радиус, а большая полуось орбиты дана в километрах.

Табл. 1.1 содержит основные астрономические характеристики рассматриваемой модели Солнечной системы [52, 72]. В дальнейшем эту модель Солнечной системы будем называть просто Солнечной системой.

Изложенная постановка теоретического изучения вращения Земли выдвигает следующие задачи исследования:

1) выбор переменных, определяющих положения и скорости движения тел Солнечной системы, и запись дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения системы;

2) классификация компонент решения дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы как функций времени с указанием их аналитической структуры;

3) описание предельного множества будущих состояний вращения Земли, т. е. ω -предельного множества решения дифференциальных уравнений движения Солнечной системы и исследование ω -предельного режима вращения Земли, выход к которому порождает или исключает вековые вариации элементов вращения;

4) определение постоянных прецессии и нутации земной оси и нахождение параметров вариаций элементов вращения Земли с указанием общего направления и величины скорости векового движения полюса в среднем, а также определение величины векового замедления вращения Земли.

Сформулированные задачи существенно опираются на исследование следующих общих вопросов устойчивости поступательного движения тел Солнечной системы (при условии, что оно обладало этими свойствами в прошлом): а) устойчивости по Лагранжу и по Пуассону поступательных движений тел Солнечной системы; б) рекуррентности поступательного движения тел Солнечной системы.

С учетом решений этих вопросов и задач общей теории вращения Земли необходимо исследовать вековое удаление Луны от Земли в рамках системы Земля—Луна и сближение плоскостей орбит тел Солнечной системы с ее неизменяемой плоскостью Лапласа.

Динамические системы в метрических пространствах

Построение теории вращения Земли относительно ее центра масс в изложенной постановке задач требует исследования эволюции Солнечной системы в целом — системы тел, рассматриваемых как материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона. Такое исследование необходимо для выяснения закономерностей движения системы тел на больших космогонических интервалах времени, в частности сохранения свойств и характера изменения движения в зависимости от возмущающих факторов. Постановка соответствующих задач приводит к системам дифференциальных уравнений, исследование которых на неограниченно большом промежутке времени выполняется только качественными методами анализа.

Следует отметить, что небесная механика располагает весьма скромным запасом задач, разрешенных в квадратурах от элементарных функций. Получившие широкое развитие численные и приближенные методы решения уравнений движения небесных тел пригодны только для ограниченных интервалов времени. Более того, такие методы построения решений имеют принципиальный недостаток — при заданных начальных условиях движения они дают только одно частное решение задачи, а для нахождения другого частного решения или внесения в задачу новых сведений все вычисления надо производить заново. Поэтому численные и приближенные методы решений, не обладая общностью и гибкостью качественных методов, не позволяют делать заключение об эволюции системы небесных тел, справедливое на неограниченно большом промежутке времени.

Основы качественных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений заложены А. Пуанкаре [35, 68] в связи с задачами небесной механики и космогонии и А. М. Ляпуновым [51] — в связи с проблемами устойчивости движения. Особый вклад в развитие качественных методов исследований дифференциальных уравнений был внесен Дж. Биркгофом — одним из основателей теории динамических систем [91].

Теория динамических систем в ее элементарной постановке рассматривает движения механической системы с конечным числом степеней свободы, описываемые нормальной автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (2.0.1)$$

Состояние такой совокупности в данный момент времени определяется значениями вещественных переменных x_1, x_2, \dots, x_N , рассматриваемых как функции времени. Каждый возможный конечный набор значений этих переменных принято называть *фазой динамической системы* и отождествлять его с точкой N -мерного евклидова фазового пространства R_N . Любой паре точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$ пространства R_N ставится в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$,

называемое расстоянием между ними. Функция ρ , заданная на прямом произведении пространства R_N на себя, называется *метрикой пространства R_N* . Основные аксиомы, которым удовлетворяет метрика, вынесены в Приложение.

Исследования показали, что динамические системы могут быть введены не только с помощью уравнений вида (2.0.1), но и вполне определяться аксиомами, отражающими наиболее существенные стороны самого движения. При этом выяснилось, что движение можно рассматривать в пространствах более общих, чем N -мерное евклидово R_N . В этом направлении принципиальное значение приобрели исследования динамических систем в метрических пространствах. Ниже изложены основные элементы и факты теории динамических систем в метрических пространствах, необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Данная глава предваряет теоретический анализ динамики поступательного движения тел Солнечной системы. В ней систематизированы общие свойства динамических систем, представленные последовательно в виде определений, предложений и их доказательств. Изложение доказательств известных свойств динамических систем связано с тем, что литература о них разрознена, а частью стала библиографической редкостью. Поэтому здесь собраны основные результаты теории динамических систем, они пополнены некоторыми свойствами, имеющими место в динамических системах частного вида. Рассматриваемая динамическая система частного вида задана в метрическом пространстве координат — импульсов механической системы в потенциальном силовом поле. Главная цель данного изложения динамических систем в метрическом пространстве заключается в следующем: во-первых, выявить ряд свойств движения динамической системы, которые имели место в прошлом и сохраняются в будущем, во-вторых, возможно более полно и корректно изложить теоретические основы динамики Земли в Солнечной системе. В методическом отношении содержание главы может послужить полезным практическим пособием по общей теории динамических систем, применяемой в классической механике.

1. Понятие динамической системы

Пусть задано некоторое метрическое пространство $M = \{G, \rho\}$, состоящее из множества G элементов q с метрикой ρ , и семейство $\{g(t, \cdot)\}$ отображений пространства M на себя. Это семейство определяется следующим образом: каждому элементу $q \in G$ и любому фиксированному вещественному значению параметра $t \in R_1$ ставится в соответствие определенный элемент p пространства M , т. е.

$$p = g(t, q). \quad (2.1.1)$$

Здесь параметр t — время.

На отображение $g(t, q)$ наложены следующие условия [45 60].

1. Начальное:

$$q = g(0, q). \quad (2.1.2)$$

2. Условие непрерывности по совокупности переменных t и q : если последовательность $\{t_n\}$ моментов времени и последовательность $\{q_n\}$ элементов пространства M сходятся, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, то имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q_n) = g(t, q). \quad (2.1.3)$$

Используя метрику ρ пространства M и определение непрерывности, предельное соотношение (2.1.3) можно записать в эквивалентной ему форме: для заданного элемента $p \in G$ и заданного момента времени $s \in R_1$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$\rho(g(t, q), g(s, p)) < \varepsilon$$

выполняется как только $\rho(q, p) < \delta$ и $|t - s| < \delta$.

3. Групповое: для любого заданного элемента $q \in G$ и любых моментов t_1 и t_2 из R_1 выполнено равенство

$$g(t_2, g(t_1, q)) = g(t_1 + t_2, q). \quad (2.1.4)$$

Согласно условию 1 отображение $g(0, q)$, соответствующее значению $t=0$, является тождественным и оставляет каждый элемент q пространства M на своем месте.

Из условий 1 и 3 вытекает существование отображения $g(-t, q)$, являющегося обратным к отображению $g(t, q)$. Действительно, •

$$g(t, g(-t, q)) = g(t - t, q) = g(0, q) = q. \quad (2.1.5)$$

Таким образом, семейство отображений пространства M на себя, подчиненных этим условиям, а также условию о непрерывности (2.1.1) по совокупности своих переменных, образует непрерывную группу с тремя элементами — операцией умножения

(2.1.4), единицей, равной тождественному отображению, и обратным элементом как обратным отображением к данному.

Определение 1.1. Группа отображений $g(t, q)$ метрического пространства M на себя, удовлетворяющих всем трем условиям, называется *динамической системой*.

Отображение $g(t, q)$ при фиксированном элементе q есть *движение*.

При фиксированном элементе q множество точек пространства M , соответствующих моментам времени $t \in R_1$, т. е. множество

$$g(R_1, q) = \{g(t, q) | t \in R_1\},$$

называется *траекторией движения* $g(t, q)$.

Множества

$$g(R_1^+, q) = \{g(t, q) | t \in R_1^+\}, \quad g(R_1^-, q) = \{g(t, q) | t \in R_1^-\}$$

при фиксированном элементе $q \in G$ называются *положительной* и *отрицательной полутраекториями* соответственно.

Множество

$$g(a \leq t \leq b, q) = \{g(t, q) | t \in [a, b]\}$$

при фиксированном $q \in G$ — конечная дуга траектории движения $g(t, q)$, а положительное число $b - a$ — временная длина этой дуги. Точки $q = g(0, q)$ и $p = g(s, q)$ пространства M называются *начальным состоянием* и *состоянием движения* $g(t, q)$ в момент времени $t = s$.

Из условия 2 вытекает непрерывная зависимость отображения $g(t, q)$ от начальных условий. Запишем это в виде следующего условия.

2'. Для любых элемента $p \in G$ и момента времени $s > 0, s \in R_1$, при произвольном $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$\rho[g(t, q), g(s, p)] < \varepsilon \tag{2.1.6}$$

выполняется для всех моментов времени $|t| < s$, как только $\rho(q, p) < \delta$.

Доказательство этого условия проведем от противного. Пусть существует сходящаяся последовательность $\{q_n\}$ элементов пространства M и соответствующая ей последовательность $\{s_n\}$ моментов времени $t \in R_1$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q, |s_n| < s$ и

$\rho(g(s_n, q_n), g(s_n, q)) > \varepsilon$, т. е. не выполнено неравенство (2.1.6).

По лемме Больцано—Вейерштрасса [62] из ограниченной последовательности $\{s_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{t_n\}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t, |t_n| < s$. В силу аксиомы треугольника для метрики ρ (см. Приложение) имеет место неравенство

$$\varepsilon < \rho(\bar{g}(t_n, q_n), \bar{g}(t_n, q)) = \rho(g(t_n, q), \bar{g}(t_n, q_n)) \leq \rho(g(t_n, q), g(t_n, q)) + \rho(g(t_n, q), g(t_n, q_n)).$$

Тогда в силу условия 2 каждая из величин в правой части этого неравенства может быть меньше $\varepsilon/2$ по крайней мере для достаточно больших n . Это приводит к противоречию вида $\varepsilon < \varepsilon$, что и доказывает справедливость условия 2'.

Для удобства последующего изложения тех или иных свойств динамической системы представим их в виде предложений.

Предложение 1.1. В динамической системе могут существовать следующие типы движений $g(t, q)$:

а) $g(t, q)$ — постоянное, т. е. для всех моментов времени $t \in R_1$,
 $g(t, q) = q$,

q — точка покоя;

б) $g(t, q)$ — периодическое с периодом τ , т. е. для всех моментов времени $t \in R_1$,

$$g(t + \tau, q) = g(t, q)$$

и $g(s, q) \neq g(r, q)$ для всех моментов времени s и r , таких, что $0 < s < r < \tau$;

в) $g(t, q)$ — непериодическое, т. е. для любого ненулевого $s \in R_1$ найдется хотя бы одно значение $t \in R_1$, при котором выполняется неравенство $g(t + s, q) \neq g(t, q)$.

Доказательство. Пусть движение $g(t, q)$ принадлежит некоторой динамической системе. Предполагается, что оно не относится к типу «в». Тогда найдутся такие два момента времени t_1 и t_2 , что

$$g(t_1, q) = g(t_2, q). \quad (2.1.7)$$

Обозначим $\tau = t_2 - t_1$ и рассмотрим движение $g(t, q)$ в момент времени $t + \tau$:

$$\begin{aligned} g(t + \tau, q) &= g(t, g(\tau, q)) = g(t, g(t_2 - t_1, q)) = \\ &= g(t, g(t_2, g(-t_1, q))) = g(t, g(t_2, g(-t_2, q))) = \\ &= g(t, g(t_2 - t_2, q)) = g(t, g(0, q)) = g(t, q). \end{aligned}$$

Сопоставляя начало и конец этой цепочки равенств, получим
 $g(t + \tau, q) = g(t, q)$. (2.1.8)

При выводе соотношения (2.1.8) были использованы групповое свойство (2.1.4), существование обратного преобразования (2.1.5) и равенство (2.1.7).

Обозначим через S множество всех моментов времени $t \in R_1$, которые удовлетворяют (2.1.8). Множество S является группой по отношению к операции сложения. Оно вместе с каждым своим элементом τ содержит элемент $-\tau$ и вместе с каждой парой (τ_1, τ_2) своих элементов — их сумму $(\tau_1 + \tau_2)$. Пусть s — наименьшее положительное число, входящее в множество S . Если такой элемент существует, то по определению

$$g(t + s, q) = g(t, q) \quad (2.1.9)$$

и $g(t_1, q) \neq g(t_2, q)$ для всех моментов времени t_1 и t_2 , таких, что $0 \leq t_1 < t_2 < s$. В этом случае рассматриваемое движение $g(t, q)$ относится к типу "б".

Пусть множество S не имеет наименьшего положительного элемента τ , удовлетворяющего требованию (2.1.8). Тогда между моментами времени $t=0$ и $t=s$ ($s \in S$), где τ — произвольный элемент множества S , найдется такой момент $t=s$, что для $s \in R_1$ имеет место равенство (2.1.9). Обозначим через $\{s_n\}$ последовательность положительных чисел из множества S , удовлетворяющих равенству (2.1.8), таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Тогда при произвольном фиксированном моменте времени $t \in R_1$ в силу непрерывности отображения выполняются равенства

$$\begin{aligned} g(t, q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - [t/s_n] s_n, q) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(t, g(-[t/s_n] s_n, q)) = g(0, q) = q. \end{aligned}$$

Здесь $[t/s_n]$ означает целую часть данного отношения. Отсюда следует, что для произвольного момента времени $t \in R_1$ выполняется равенство $g(t, q) = q$ и движение $g(t, q)$ относится к типу "а".

Предложение 1.2. Любая конечная дуга $g(a \leq t \leq b, q)$ траектории движения $g(t, q)$ образует замкнутое ограниченное множество в пространстве M .

Доказательство. Пусть $\{g_n\}$ — произвольная последовательность состояний движения $g(t, q)$, входящих в дугу $g(a \leq t \leq b, q)$, т. е. $g_n = g(t_n, q)$, где $t_n \in [a, b]$. По лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{t_n\}$ моментов времени можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{s_n\}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ и $a \leq s \leq b$. Тогда в силу условия 2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, q) = g(s, q).$$

Следовательно, состояние $g(s, q)$ движения $g(t, q)$ входит в дугу $g(a \leq t \leq b, q)$, ибо $s \in [a, b]$. Это означает, что произвольная предельная точка $g(s, q)$ принадлежит самой дуге, иными словами, дуга $g(a \leq t \leq b, q)$ замкнута. Ограниченность дуги $g(a \leq t \leq b, q)$ следует из непрерывности движения $g(t, q)$ и конечности отрезка $[a, b]$. Что и требовалось доказать.

Как известно (см. Приложение), замкнутость и ограниченность подмножества A конечномерного пространства M эквивалентны компактности множества A в M . Следовательно, любая конечная дуга $g(a \leq t \leq b, q)$ траектории $g(R_1, q)$ движения $g(t, q)$ в конечномерном пространстве M компактна в M .

Пусть A — подмножество пространства M . Обозначим

$$A_* = g(s, A) \quad (2.1.10)$$

образ множества A при отображении группы (2.1.1), соответствующем моменту $s \in R_1$, или значению s параметра группы.

Определение 1.2. Множество A пространства M называется инвариантным по отношению к динамической системе $g(t, \cdot)$, если оно для произвольного момента времени $s \in R_1$ совпадает с множеством A , определенным равенством (2.1.10).

Механический смысл этого определения таков: если некоторое состояние $g(t, q)$ движения $g(t, q)$ находится в инвариантном множестве A , то вместе с этим состоянием в таком множестве находится вся траектория движения.

Отсюда непосредственно следует

Предложение 1.3. Всякая траектория движения, объединение любого числа таких траекторий и все пространство M являются инвариантными множествами.

Относительно инвариантных множеств имеют место следующие два предложения.

Предложение 1.4. Если $A \subset M$ — инвариантное множество, то его замыкание \bar{A} в метрике ρ пространства M также инвариантно.

Доказательство. Пусть $q \in \bar{A} \setminus A$ и $\{g_n\}$ — последовательность элементов множества A , сходящихся к q , т. е. $g_n \in A$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, q) = 0.$$

Отсюда по условию 2' для произвольного момента времени $s \in R_1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(s, g_n) = g(s, q).$$

Так как состояние $g(s, g_n)$ движения $g(t, q)$ принадлежит инвариантному множеству A , то состояние $g(s, q)$ движения $g(t, q)$ принадлежит замыканию \bar{A} . В силу произвольности момента времени s имеет место включение $g(t, A) \subset \bar{A}$ для всех $t \in R_1$. Действуя на обе части этого включения обратным преобразованием $g(-t, A)$, получим $\bar{A} \subset g(-t, A)$. Поэтому множество A , с одной стороны, содержит свой образ $g(t, \bar{A})$, а с другой — содержится в своем образе $g(-t, \bar{A})$. Отсюда вытекает равенство $\bar{A} = g(t, \bar{A})$ для всех $t \in R_1$, т. е. инвариантность множества \bar{A} .

Предложение 1.5. Множество A точек покоя динамической системы замкнуто в пространстве M и инвариантно.

Доказательство. Инвариантность множества A следует из Предложения 1.1 о точке покоя динамической системы. Докажем замкнутость множества A , т. е. $A = \bar{A}$.

Пусть $\{g_n\}$ — произвольная последовательность точек покоя динамической системы, входящих в множество A , и q — ее предельная точка, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, q) = 0$. По определению точки покоя

для любого момента времени $t \in R_1$ имеем $g(t, g_n) \equiv g_n$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, g_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = q.$$

Отсюда, используя условие 2, получим $g(t, q) = q$, т. е. q — точка покоя динамической системы и $q \in A$.

Перейдем к предложениям о предельных состояниях движения.

Предложение 1.6. Если p — точка покоя динамической системы, то никакая траектория ее движений не входит в точку p за конечное время.

Доказательство. Пусть p — точка покоя динамической системы и при условии этого Предложения траектория $g(R_1, q)$ движения $g(t, q)$ входит в точку p за конечное время $s \in R_1$, т. е. $p = g(t, q)$, где $q \neq p$. Тогда по условию 3

$$p = g(-s, p) = g(-s, g(s, q)) = g(0, q) = q.$$

Это равенство противоречит условиям выбора движения $g(t, q)$, что и доказывает данное Предложение.

Обозначим как $S(\delta, q)$ открытый шар радиуса δ с центром в точке q , т. е. подмножество

$$S(\delta, q) = \{g \mid g \in M, \rho(g, q) < \delta\}$$

пространства M . Тогда справедливо

Предложение 1.7. Если для любого числа $\delta > 0$ в шаре $S(\delta, q)$ найдется точка p такая, что полутраектория $g(R_1^+, p) \subset S(\delta, q)$, то p — точка покоя.

Доказательство. Пусть при условиях предложения q не является точкой покоя. Следовательно, в некоторый момент времени $s > 0$ движение $g(t, q)$ отойдет от состояния q , т. е. $q \neq g(s, q)$, и будет находиться на некотором расстоянии ε от состояния q , т. е. $\rho(q, g(s, q)) = \varepsilon > 0$. В силу условия 2' для данного числа $\varepsilon/2$ и фиксированного момента времени $s \in R_1$ и для данного элемента $p \in M$ найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$\rho(g(t, q), g(t, p)) < \varepsilon/2$$

при всех $|t| \leq s$, как только $\rho(q, p) < \delta < \varepsilon/2$. По условиям предложения в шаре $S(\delta, q)$ найдется точка p такая, что полутраектория $g(R_1^+, p) \subset S(\delta, q)$. Тогда в силу аксиомы треугольника для метрики ρ получим

$$\rho[q, g(s, q)] \leq \rho[q, g(s, p)] + \rho[g(s, p), g(s, q)] < \delta + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Следовательно, расстояние между состояниями q и $g(s, q)$ одновременно равно ε и меньше, чем ε , чего быть не может. Это и доказывает Предложение 1.7.

Предложение 1.8. Если движение $g(t, q)$ для любой последовательности $\{t_n\}$ моментов времени $t_n \in R_1$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, удовлетворяет равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = p, \tag{2.1.11}$$

то p — точка покоя.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$. По определению предела (2.1.11) получим, что $\rho(p, g(t, q)) < \delta$, как только $t \geq s(\delta)$. Это означает, что

$$g(R, q) \subset S(\delta, p),$$

где $q = g(s, q)$. Отсюда согласно предыдущему Предложению вытекает, что p — точка покоя.

Определение 1.3. Произвольная последовательность $\{t_n\}$ моментов времени $t_n \in R_1$ называется ω -последовательностью, если $t_n \geq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$.

Аналогично такая последовательность называется α -последовательностью, если $t_n \leq 0$ и $\lim_{n \rightarrow -\infty} t_n = -\infty$.

Всякая ω - или α -последовательность называется λ -последовательностью.

Определение 1.4. Если последовательность $\{g(t_n, q)\}$ состояний движения $g(t, q)$, соответствующая ω - (или α -) последовательности, имеет предельную точку $p \in M$, то эта точка называется ω - (или α -) предельным состоянием движения $g(t, q)$.

Множества всех ω -предельных и α -предельных состояний движения $g(t, q)$ соответственно обозначаются $W(\omega, g, q)$ и $W(\alpha, g, q)$ и называются ω - и α -предельными множествами.

Если для некоторой λ -последовательности последовательность $\{g(t_n, q)\}$ состояний движения $g(t, q)$ имеет предельную точку $p \in M$, то p называется λ -предельным состоянием движения $g(t, q)$. Множество всех λ -предельных состояний движения $g(t, q)$ обозначается символом $W(\lambda, g, q)$ и называется λ -предельным множеством.

Предложение 1.9. Множества $W(\omega, g, q)$, $W(\alpha, g, q)$ и $W(\lambda, g, q)$ всех ω -предельных, α -предельных и λ -предельных состояний движения $g(t, q)$ являются инвариантными замкнутыми множествами пространства M .

Доказательство проведем для множества $W(\omega, g, q)$. Пусть точка p есть ω -предельное состояние движения $g(t, q)$ и $\{t_n\}$ — соответствующая ему ω -последовательность, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = p. \quad (2.1.12)$$

Зафиксируем произвольно момент времени. Пусть $g(s, q)$ — состояние движения $g(t, q)$ в момент времени $t = s$. В силу условия 2' для любого числа $\varepsilon > 0$ и данного момента времени $s \in R_1$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\rho(g(t_n + s, q), g(s, p)) < \varepsilon, \quad (2.1.13)$$

как только $\rho(p, g(t_n, q)) < \delta$. Но в силу (2.1.12) это неравенство выполняется для всех n , начиная с некоторого $n_1(\delta) \geq 1$. Поэтому для всех $n > n_1(\delta)$ имеет место также неравенство (2.1.13). Следовательно, точка $g(s, p) \in M$, будучи предельной точкой последовательности $\{g(t_n + s, q)\}$, является ω -предельным состоянием

движения $g(t, q)$. Отсюда в силу произвольности $g(s, p)$ множество $W(\omega, g, q)$ вместе с каждым своим элементом p содержит всю траекторию $g(R_1, p)$ движения $g(t, p)$. Это означает инвариантность множества $W(\omega, g, q)$. Докажем его замкнутость.

Пусть $\{q_n\}$ — произвольная последовательность элементов множества $W(\omega, g, q)$ и $p = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$. Фиксируя произвольное число $\varepsilon > 0$, выберем n так, чтобы $\rho(q_n, p) < \varepsilon/2$. Но $q_n \in W(\omega, g, q)$, и поэтому найдется такой момент времени $t = t_n$, что $\rho(q_n, g(t_n, q)) < \varepsilon/2$. Тогда в силу аксиомы треугольника для метрики ρ имеем

$$\rho(p, g(t_n, q)) \leq \rho(p, q_n) + \rho(q_n, g(t_n, q)) < \varepsilon.$$

Полученное неравенство означает, что точка p есть ω -предельное состояние движения $g(t, q)$. Тогда $p \in W(\omega, g, q)$. Что и требовалось доказать.

Отметим следующие очевидные включения:

$$W(\omega, g, q) \subset \overline{g(R_1, q)}, \quad W(\alpha, g, q) \subset \overline{g(R_1, q)}, \quad (2.1.14)$$

вытекающие из того, что любое замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

Предложение 1.10. Точка $q \in G$ является точкой покоя для движения $g(t, q)$ тогда и только тогда, когда имеет место

$$W(\omega, g, q) = W(\alpha, g, q) = q. \quad (2.1.15)$$

Доказательство. Если q — точка покоя движения $g(t, q)$, то, очевидно, будет выполнено равенство (2.1.15).

Пусть обратно имеет место равенство (2.1.15), т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, q) = q$. Тогда одна и та же точка $q \in G$ одновременно является элементом ω -предельного и α -предельного множества движения $g(t, q)$. Поэтому согласно Предложению 1.8 q представляет собой точку покоя.

Предложение 1.11. Если $g(t, q)$ — периодическое движение с периодом $\tau > 0$, то имеет место равенство

$$W(\omega, g, q) = W(\alpha, g, q) = g(R_1, q). \quad (2.1.16)$$

Доказательство. Пусть $p \in G$ — произвольная точка траектории $g(R_1, q)$, т. е. для некоторого момента времени $s \in R$, выполнено равенство $p = g(s, q)$. Тогда для любого натурального числа n выполняется соотношение $p = g(s \pm n\tau, q)$ и $p = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s \pm n\tau, q)$. Последнее означает, что $p \in W(\omega, g, q)$ и $p \in W(\alpha, g, q)$. Отсюда вытекают включения

$$g(R_1, q) \subset W(\omega, g, q), \quad g(R_1, q) \subset W(\alpha, g, q). \quad (2.1.17)$$

Докажем теперь справедливость включений, обратных (2.1.17):

$$W(\omega, g, q) \subset g(R_1, q), \quad W(\alpha, g, q) \subset g(R_1, q). \quad (2.1.18)$$

С этой целью рассмотрим произвольный элемент p множества $W(\omega, g, q)$. Обозначим через $\{t_n\}$ последовательность, соответствующую элементу p ω -предельного множества движения $g(t, q)$. Каждый из моментов времени t_n представим в виде $t_n = k_n \tau + s_n$, где τ — период движения $g(t, q)$, k_n — натуральное число и $0 \leq s_n \leq \tau$. Согласно лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{s_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Последнюю для сокращения записи отождествим с исходной последовательностью и положим $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

В силу периодичности движения $g(t, q)$ и согласно условию 2 имеем

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(k_n \tau + s_n, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, q) = g(s, q).$$

Иными словами, произвольная точка p множества $W(\omega, g, q)$ является точкой траектории $g(R_1, q)$ и тем самым доказываемое первое из включений (2.1.18). Аналогично доказывается и второе.

Сопоставляя (2.1.17) и (2.1.18), получим следующие равенства:

$$W(\omega, g, q) = g(R_1, q), \quad W(\alpha, g, q) = g(R_1, q),$$

из которых вытекает полный набор равенств (2.1.16).

Предложение 1.12. Для того чтобы множество $W(\omega, g, q)$ ($W(\alpha, g, q)$) для движения $g(t, q)$ было пустым, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(q, g(t, q)) = \infty \quad (\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(q, g(t, q)) = \infty). \quad (2.1.19)$$

Доказательство. Если имеет место равенство (2.1.17), то для любого положительного n найдется момент t_n времени $t \in R_1$, по истечении которого полутраектория $g(R_1^+, q)$ покинет шар $S(n, q)$. Следовательно, множество $W(\omega, g, q)$ пусто, т. е. условие (2.1.19) достаточно, чтобы множество $W(\omega, g, q)$ было пустым.

Доказательство необходимости. Пусть множество $W(\omega, g, q)$ пусто, но для некоторой ω -последовательности $\{t_n\}$ нарушено равенство (2.1.19), т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(q, g(t_n, q)) = \varepsilon, \quad \varepsilon < \infty.$$

Тогда последовательность $\{g(t_n, q)\}$ состояний движения $g(t, q)$ будет находиться внутри шара $S(\varepsilon, q)$. Согласно лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{g(t_n, q)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{g(s_n, q)\}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, q) = p$ и $\{t_n\}$ — ω -последовательность. Поэтому $p \in W(\omega, g, q)$ и множество $W(\omega, g, q)$ не пусто вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает необходимость Предложения 1.12.

Предложение 1.13. Для того чтобы множество $W(\omega, g, q)$ ($W(\omega, g, q)$) для движения $g(t, q)$ состояло из единственной точки $p \in G$, необходимо и достаточно, чтобы полутраектория $g(R_1^+, q)$ входила в эту точку при $t \rightarrow \infty$ (при $t \rightarrow -\infty$), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(p, g(t, q)) = 0 \quad (\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(p, g(t, q)) = 0). \quad (2.1.20)$$

Доказательство необходимости. Пусть множество $W(\omega, g, q)$ состоит из единственного элемента $p \in G$, но хотя бы для одной ω -последовательности нарушено равенство (2.1.20), т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(t_n, q)) = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. С другой стороны, для p существует ω -последовательность $\{s_n\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(s_n, q)) = 0$.

Как непрерывная функция ρ принимает любые значения, заключенные между 0 и ε . В частности, можно подобрать ω -последовательность $\{\tau_n\}$ моментов времени $t \in R_1^+$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(p, g(\tau_n, q)) = \delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$ и $\delta < \infty$. Тогда согласно упомянутой лемме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{g(\tau_n, q)\}$, заключенной в шаре $S(\delta, \rho)$, можно извлечь подпоследовательность $\{g(t_n, q)\}$, сходящуюся в точку p' и $p \neq p'$. Следовательно, вопреки предположениям множество $W(\omega, g, q)$ содержит точку p' , отличную от p . Полученное противоречие доказывает необходимость Предложения.

Доказательство достаточности. Если условие (2.1.20) выполнено, то согласно Предложению 1.12 множество $W(\omega, g, q)$ не пусто. Предположим, что оно имеет хотя бы два элемента, $q_1 \in W(\omega, g, q)$ и $q_2 \in W(\omega, g, q)$, для каждого из которых выполнено равенство (2.1.20) и $q_1 \neq q_2$. Тогда $\rho(q_1, q_2) = \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$. Следовательно, при любом $t \in R_1^+$

$$\varepsilon = \rho(q_1, q_2) \leq \rho(q_1, g(t, q)) + \rho(q_2, g(t, q)).$$

В данном неравенстве, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, в силу (2.1.20) получим $\varepsilon < 0$. Это противоречие доказывает достаточность Предложения.

Особый интерес представляют динамические системы, порождаемые решениями дифференциальных уравнений вида (2.0.1). Возникает вопрос, при каких условиях, наложенных на правые части этих уравнений, фазовые движения в пространстве R_n с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \quad (2.1.21)$$

обладают свойствами динамических систем. Он решается с помощью теоремы о существовании и единственности и теоремы о продолжаемости решения уравнений (2.0.1). Сформулируем эти теоремы [33, 67].

Теорема существования и единственности. Если правые части уравнения (2.0.1) непрерывны в области $D \subset$

$\subset R_n$ и удовлетворяют во всякой компактной области $\bar{A} \subset D$ условиям Липшица

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)| < \\ < L \{ |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где L — постоянная, зависящая, вообще говоря, от области \bar{A} , и заданы начальные условия при $t = t_0 \in R_1$

$$x_1(t_0) = q_1, \quad x_2(t_0) = q_2, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = q_n, \quad (2.1.22)$$

определяющие точку $q^0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ в области D , то уравнения (2.0.1) имеют единственное решение в D

$$x_i = x_i(t; t_0; q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.23)$$

удовлетворяющее начальным условиям (2.1.22), т. е.

$$x_i(t; t_0; q_1, q_2, \dots, q_n) = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Введем стандартные сокращения: $x(t, t_0, q)$ — решение (2.1.23); $f(x) = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ — правая часть уравнений (2.0.1) и система (2.0.1) с начальными условиями (2.1.22) —

$$dx/dt = f(x), \quad x(t_0, t_0, q) = q. \quad (2.1.24)$$

Отметим, что теорема доказывается обычно для более широкого класса уравнений, чем система (2.1.24). Изложенная форма теоремы обеспечивает существование решения (2.1.23) в некотором конечном интервале времени. Поэтому естественным образом возникает необходимость продолжения полученного решения как в сторону возрастания, так и в сторону убывания времени t .

Определение 1.5. Решение $x(t, t_0, q)$, заданное на интервале времени $a < t < b$, называется продолжаемым вправо (влево), если существует решение $y(t, t_1, q)$ того же уравнения (2.1.24), определенное на интервале времени $a < t < t_2$ ($t_1 < t < b$), где $b < t_2$ ($t_1 < a$), и совпадающее с $x(t, t_0, q)$ на интервале времени $a < t < b$. Решение, не продолжаемое ни вправо, ни влево, называется непродолжаемым.

Непродолжаемые решения задачи (2.1.24) характеризуют следующие утверждения.

Теорема о непродолжаемости. Пусть $f(x)$ уравнения (2.1.24) определена и непрерывна в области $D \subset R_n$. Решение $x(t, t_0, q)$, заданное на интервале (a, b) , непродолжаемо тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

- 1) $a = -\infty$, $b = \infty$;
- 2) решение уходит в бесконечность как при $t \rightarrow a + 0$, так и при $t \rightarrow b - 0$;
- 3) расстояние от решения $x(t_0, t_0, q)$ до границы области D стремится к нулю как при $t \rightarrow a + 0$, так и при $t \rightarrow b - 0$.

Удобна в приложении следующая теорема, выражающая достаточное условие продолжаемости решения.

Теорема о достаточном условии продолжаемости [65, 91]. Если решение $x(t, t_0, q)$ остается в компактной области $A \subset D$ как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow \infty$, то оно может быть продолжено на всю действительную ось времени R_1 .

Начальные условия (2.1.22) задачи обычно определяются из наблюдений или эксперимента путем измерения соответствующих параметров движения. Любые измерения имеют погрешность. Если даже последние незначительны, они могут привести к существенным изменениям свойств движения. Поэтому возникает необходимость обеспечить близость решений, удовлетворяющих близким начальным условиям. Принципиальность этого положения подчеркнута Ж. Адамаром. В связи с этим укажем теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий [60, 67].

Теорема о непрерывной зависимости. Если решение $x(t, t_0, q)$ существует на интервале времени (a, b) , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что решение $y(t, t_0, p)$ с начальными условиями $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ удовлетворяет неравенству $\rho(x, y) < \varepsilon$ для всех $t \in (a, b)$, как только

$$|q_1 - p_1| < \delta, \quad |q_2 - p_2| < \delta, \quad \dots, \quad |q_n - p_n| < \delta.$$

Сформулированные теоремы с некоторыми изменениями их условий справедливы для решений неавтономных систем дифференциальных уравнений [33, 44]. Между тем решения автономных систем вида (2.0.1) обладают свойством, характерным только для них. Одно из таких свойств выражается групповым условием. Сформулируем это свойство применительно к решению (2.1.23).

Правые части (2.1.23) можно привести к виду

$$\begin{aligned} x_i(t; t_0; q_1, q_2, \dots, q_n) = \\ = x_i(t - t_0; 0; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

где $x(t - t_0; 0; q)$ также является решением уравнения (2.1.24). Это объясняется тем, что правые части уравнения (2.1.24) явно не зависят от времени и поэтому сохраняют свой вид при замене переменной t на новую переменную $s = t - t_0$. Далее, в силу начальных условий в момент времени $t = t_0$ решение $x(t - t_0; 0; q)$ обращается в $q = x(0, 0, q)$. Следовательно, согласно теореме о единственности решения $x(t, t_0, q)$ и $x(t - t_0, 0, q)$, равные между собой при $t = t_0$, совпадают для всех значений t . С учетом этого решение (2.1.23) можно записать в виде

$$x(t - t_0, 0, q) = g(t, q). \quad (2.1.25)$$

Решение (2.1.25) в момент времени s определяет точку

$$p = g(s, q) \quad (2.1.26)$$

фазового пространства R_n . Ее положение можно принять за новое начальное состояние движения и составить решение

$$g(t, p) = x(t - t_0, 0, p).$$

При этом имеет место тождество $g(t+s, p) \equiv x(t+s-t_0, 0, p)$, ибо согласно равенству (2.1.26) при $t=s$

$$x(-s-t_0, 0, p) = q, \quad x(-s+s-t_0, 0, q) = q.$$

Это означает что решения $x(t-t_0, 0, p)$ и $x(t+s-t_0, 0, q)$ совпадают при $t=s$. Следовательно, в силу теоремы о единственности эти решения будут совпадать всюду на R_1 .

С учетом произвольности момента времени t получена

Теорема о групповом условии. Всякое решение $g(t, q)$ уравнения (2.1.24), определенное при $t \in R_1$, обладает свойством группы, т. е.

$$g(t, g(s, q)) = g(t+s, q).$$

Из указанных теорем вытекает

Предложение 1.14. Если каждое решение $g(t, q)$ уравнения (2.1.24), проходящее в начальный момент времени через произвольную точку q пространства R_n , определено для всех моментов времени $t \in R_1$, то совокупность движений, описываемых уравнениями (2.1.24), является динамической системой в n -мерном фазовом пространстве R_n с метрикой (2.1.21). Система движений на множестве $M \subset R_n$ определяет динамическую систему на метрическом пространстве G с метрикой ρ (2.1.21), если для любого элемента $q \in G$ решение $g(t, q)$ определено при всех значениях $t \in R_1$ и множество M инвариантно. Если решение $g(t, q)$ определено для всех значений $t \in R_1$, то оно определяет динамическую систему с фазовым пространством $M = g(R_1, q)$.

2. Устойчивые движения

Рассмотрим полное метрическое пространство $M = \{G, \rho\}$ и динамическую систему $g(t, \cdot)$, используя результаты работ [18, 59, 60, 69].

Определение 2.1. Движение $g(t, q)$ называется *положительно (отрицательно) устойчивым по Лагранжу*, если замыкание полутраектории $g(R_1^+, q)$ ($g(R_1^-, q)$) в метрике ρ пространства M компактно в M .

Движение, одновременно положительно и отрицательно устойчивое по Лагранжу, называется *устойчивым по Лагранжу*.

О движениях положительно устойчивом, отрицательно устойчивом и устойчивом по Лагранжу будем говорить, что оно устойчиво L^+ , устойчиво L^- и устойчиво L соответственно.

Заметим, что если пространство M компактно, то все движения устойчивы L . Если полутраектория $g(R_1^+, q)$ ($g(R_1^-, q)$) содержится в компактном подмножестве пространства M , то описываемое ею движение устойчиво L^+ (устойчиво L^-). Из указанных определений устойчивости по Лагранжу движений в Предложениях 1.10 и 1.11 следует

Предложение 2.1. Покой и периодическое движение

устойчивы L . Если движение $g(t, q)$ устойчиво L^+ (устойчиво L^-), то множество $W(\omega, g, q)$ ($W(\alpha, g, q)$) не пусто.

Предложение 2.2. Если движение $g(t, q)$ устойчиво L^+ (устойчиво L^-), то расстояние между траекторией $g(R_1, q)$ движения и множеством $W(\omega, g, q)$ ($W(\alpha, g, q)$) равно нулю, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(W(\omega, g, q), g(t, q)) = 0 \quad (\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(W(\alpha, g, q), g(t, q)) = 0). \quad (2.2.1)$$

Доказательство. Пусть условия Предложения 2.2 выполнены, т. е. множество $g(R_1^+, q)$ компактно, а равенство (2.2.1) неверно. Тогда хотя бы для одной ω -последовательности $\{t_n\}$ получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(W(\omega, g, q), g(t_n, q)) = \delta$ и $\delta > 0$. Множество точек $\{g(t_n, q)\}$ входит в компактное множество, совпадающее с замыканием полутраектории $g(\overline{R_1^+}, q) = G$. Следовательно, из ограниченной последовательности $\{g(t_n, q)\}$ можно извлечь сходящуюся в метрике ρ подпоследовательность $\{g(s_n, q)\}$, предельная точка p которой не входит в множество $W(\omega, g, q)$. Полученное противоречие доказывает Предложение 2.2.

Предложение 2.3. Если движение $g(t, q)$ устойчиво L^+ (устойчиво L^-), то множество $W(\omega, g, q)$ ($W(\alpha, g, q)$) связано.

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда компактное множество $W(\omega, g, q)$ можно представить в виде суммы двух компактных непересекающихся множеств A и B , расстояние между которыми отлично от нуля, т. е. $W(\omega, g, q) = A \cup B$ и $\rho(A, B) = \delta > 0$. Так как $A \subset W(\omega, g, q)$ и $B \subset W(\omega, g, q)$, то существуют последовательности $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$ такие, что $\{g(t_n, q)\} \subset S(\delta/3, A)$ и $\{g(s_n, q)\} \subset S(\delta/3, B)$. Из последовательности $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ извлечем ω -подпоследовательность $\{\bar{t}_n\}$ и $\{\bar{s}_n\}$ соответственно так, чтобы выполнялись неравенства

$$\bar{t}_1 < \bar{s}_1 < \bar{t}_2 < \bar{s}_2 < \dots < \bar{t}_n < \bar{s}_n < \dots$$

В силу непрерывности функции $\rho(A, g(t, q))$ по t получим, что $\rho(A, g(\bar{t}_n, q)) < \delta/3$, $2\delta/3 \leq \rho(A, B) - \rho(B, g(\bar{s}_n, q)) \leq \rho(A, g(\bar{s}_n, q))$.

Поэтому найдется такая последовательность t_n' моментов времени, что $\bar{t}_n < t_n' < \bar{s}_n$ и $\rho(A, g(t_n', q)) = \delta/2$. Множество точек $\{g(t_n', q)\}$ вложено в компактное замыкание полутраектории $g(\overline{R_1^+}, q)$. Поэтому из последовательности $\{g(t_n', q)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{g(s_n', q)\}$ к некоторой точке $r \in W(\omega, g, q)$. При этом для предельной точки имеем

$$r \in W(\omega, g, q), \quad \rho(A, r) = \delta/2, \quad \rho(B, r) \geq \rho(A, B) - \rho(A, r) = \delta/2.$$

Отсюда вытекает, что $W(\omega, g, q) \neq A \cup B$. Полученное противоречие доказывает связность множества $W(\omega, g, q)$.

Отметим, что при доказательстве Предложения компактность замыкания полутраектории $g(R_1, q)$ была использована существенно. Поэтому в случае некомпактных траекторий множество