# Математика және Физика

ғылыми-әдістемелік журнал

№4 • 2004 жыл

- 1998
- 1999
- 2000
- 2001
- 2003
- 2004
- 2005
- 2006


# Сабақтастықты нығайту тәсілдерінің бір жолы

**А.МҰБАРАКОВ,**
**Павлодар мемлекеттік университетінің доценті, педагогика ғылымдарының кандидаты**

Мектеп окулыктарының кейбірінде (1,2) карастырылған жаңа ұғымдардың біразы колданусыз калады. Олар баска ұғымдарды негіздеуге де пайдаланылмайды, жаңа есептерді шешуге де колданылмайды, ал бұл окушылардың білімдерінің арасындағы байланысты нашарлатады.

Айталык А.В.Погорелов окулығында сынық ұғымы, жай сынық ұғымы, тұйыкталған сынық ұғымы, дөңес көпбұрыш ұғымдары қарастырылады (§13, 113, 114 пунктер). «$A_1$, $A_2$, $A_3$,...$A_n$ сынығы деп $A_1$, $A_2$,...$A_n$ нүктелерінен және осы нүктелерді косатын $A_1$, $A_2$, $A_2$, $A_3$,...$A_{n-1}$ кесінділерінен құралатын фигураны айтады. $A_1$, $A_2$, $A_n$ нүктелері — сыныктың төбелері деп, ал $A_1$, $A_2$, $A_3$,...$A_{n-1}$ $A_n$ кесінділері сыныктың буындары деп аталады. Егер сыныктың буындары өзара қиылыспайтын болса, ол жай сынык деп аталады...» (2, 198-199 бет). «Егер сыныктың ұштары дәл келіп ұштасып жатса, оны тұйыкталған сынык деп атайды...» Жазық көпбұрышты облыс деп көпбұрышпен шектелген жазықтықтың шекті бөлігін айтады... Егер көпбұрыш оның кабырғасын камтитын кез келген түзуге қарағанда бір жарты жазықтыкта жатса, оны дөнес бұрыш деп атайды...» (2, 200-201 беттер).

Алайда осындай, азда болса, мағлұматтар, осы тұста ғана айтылып, кейін ешкандай жерде колданыс таппайды. Ол аз дегендей осы ұғымдармен жұмыс істеуге ешқандай есептерде берілмеген.

Енді, мұндай ұғымдармен жұмыс істеудің бір әдісін көрсетейік. Біріншіден, осы ұғымдарды бөліп алайык: сынык және оның элементтері; жай сынык; дөнес көпбұрыш.

Алғашкы екі сұрактың окушы үшін қиындығы жок және окулыкта берілген есептер бұл ұғымдарды бекітуге жеткілікті.

I. Алдымен, сызыкты теңсіздіктерді окыту әдістемесін көрсетейік. Бұл алгебра сабағында жүргізілуі мүмкін.

1. Оның максаты-теңдеудің шешімі, теңсіздіктің және тенсіздіктер жүйесінің шешімі деген сұрактарды қайталау.

2. Окушыларға қарапайым тенсіздіктер жүйесін шешуді ұсынамыз. Мысал №1: келесі тенсіздіктер жүйесі берілсін: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 2$. Координат жазыктығында, координаталары осы жүйені қанағаттандыратын нүктелер жиынын көрсетіңіз деген тапсырма ұсыналық.

3. Окушының іс-әрекетін көрсетейік. Алғашкы екі тенсіздік екі координатасы да теріс болмайтын нүктелер жиынын көрсетеді, яғни бұл екі тенсіздік — бірінші координаттық ширекті береді. Үшінші тенсіздіктің шешімін аныктау үшін, окушы $x+y=2$ теңдеуінің графигін салу кажет. $x$ айнымалысын теңдеудің екінші жағына ауыстырып $y=2-x$ теңдеуін алады. $y=-x$ графигі аркылы $y=2-x$ графигін салу үшін $y$-тің мәні Оу осі бойынша 2-ге жоғары көтеру керектігін окушы аңғарады. Алайда, окушыға $x+y=2$ теңсіздігі керек. Ол үшін мұғалім окушыға берілген теңсіздікті $y \leq 2-x$ түрінде зерттеуді ұсынады. Егер координатасы $(x_0, y_0)$ болатын кез келген нүкте $x+y=2$ теңдеуін канағаттандырса, яғни нүкте осы түзудің бойында жатса, онда берілген тенсіздікті координаталары $y \leq y_0$ шартын канағаттандыратын барлык $(x_0;y)$ нүктелері канағаттандырады.

Сонымен, $x+y \leq 2$ теңсіздігінің шешімі жарты жазықтық және ол $x+y = 2$ түзуімен шектелген. Осы ойларды іске асырған оқушы берілген жүйенің шешімін оңай көрсете алады.

Мұндай есептерді шешу барысында айтылған ойларды жалпылауға болады екен.

**Теорема 1:** Кез келген $ax+by+c \leq 0$ (немесе $ax+by+c \geq 0$) теңсіздігінің шешімі жартыжазықтық және оның шекарасы $ax+by+c = 0$ түзуі. Кез келген $ax+by+c < 0$ (немесе $ax+by+c > 0$) теңсіздігінің шешімі ашық жартыжазықтық.

**Теорема 2:** Координата жазықтығында кез келген жартыжазықтықты $ax+by+c \leq 0$ (немесе $ax+by+c \geq 0$) теңсіздігімен беруге болады. Кез келген ашық жартыжазықтықты $ax+by+c<0$ немесе $ax+by+c>0$) теңсіздігімен көрсетуге болады.

Бұл теоремаларды сабақта дәлелдеудің қажеттілігі жоқ, оны факультатив сабаққа міндеттеуге болады, ал оны дәлелдеудің әдісі алдыңғы есепке ұқсас. Енді геометрия сабағын қарастырайық.

II. Оқушы геометрия курсынан кез келген «түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі» дегенді айқын біледі (2,8 бет). Енді оқушы 1-теорема бойынша $ax+by+c=0$ түзуі жазықтықты $ax+by+c \leq 0$, $ax+by+c \geq 0$ теңсіздіктермен анықталатын екі жартыжазықтыққа бөлетінін көреді.

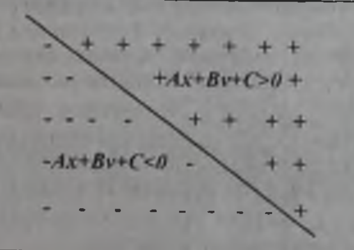
Енді жартыжазықтықтың кез келген нүктесін алып, оның координаталарын $ax+by+c$ өрнегіне қойып алдыңғы екі теңсіздіктің қайсысы орындалатынын табу керек.

Әдетте, бұл мақсат үшін координата жазықтығының 0 (0,0) нүктесін (не болмаса үшбұрыштың үшінші төбесінің, не болмаса төртбұрыштың басқа екі төбесінің координаталарын) алады.

Мұндай жұмыстарды нақты мысалдармен түсіндіріп, есептерді шешу барысында бекіткен дұрыс. Осының бір тәсілін көрсетейік.

8-сынып геометриясында оқушылар келесі фактімен танысады. «Декарттық $x$, $y$ координаталары арқылы өрнектегенде кез келген түзудің теңдеуі $ax+by+c=0$ түрінде болады (2, 122 бет). Осы жерде, «А мен В нүктелері түзу бойында жатады, демек олардың координаталары теңдеуді қанағаттандырады» деген оймен оқушы тағы да таныс. Соңғы ойды әрі дамытуға болады екен.

$ax+by+c$ үшмүшелігі тек осы түзудің $(x, y)$ нүктелері үшін ғана нөлге тең болады. Ал, осы түзудің бір жағында жатқан $(x, y)$ нүктелер үшін бұл үшмүшелік бір таңбаға ие болады, ал - екінші жағында жатқан $(x, y)$ нүктелер үшін бұл таңба басқа.




Сонымен, түзу жазықтықты үш облысқа бөледі екен:

1) $ax+by+c = 0$ түзуі,
2) $ax+by+c > 0$ жарты жазықтық,
3) $ax+by+c < 0$ жарты жазықтық.

Егер ашық жартыжазықтықтарға түзудің барлық нүктелерін қосса, онда тұйық жартыжазықтық пайда болады: $ax+by+c \geq 0$; $ax+by+c \leq 0$.

Соңғы теңсіздіктерге ұқсас теңсіздіктер өзара бір жүйе жасау мүмкін.

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hy + m \leq 0 \end{array}\right|$$

Координаталары алдыңғы жүйені қанағаттандыратын нүктелер жиынын осы жүйенің шешімдер облысы деп атайды. Оның кем дегенде бір шешімі немесе шешімі жоқ болуы мүмкін.

Тұйық жартыжазықтықтардың ортақ бөлігі бір мезгілде барлық жартыжазықтықтарға тиісті нүктелер жиыны. Мұндай нүктелер жиынын дөңес көпбұрышты жиын (фигура) деп атайды.

Жүйенің шешімі үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш немесе басқа кез келген фигура болуы мүмкін.

Дербес жағдайда, көпбұрышты дөңес жиын дөңес көпбұрыш болады, яғни тұйық дөңес сынықпен шектелген жазықтықтың бір бөлігі болу мүмкін.

Дөңес көпбұрыштың әр нүктесін сызықты теңсіздіктер жүйесінің шешімі ретінде көрсету оңай. Расында да, дөңес көпбұрыштың кез келген төбесі оның екі қабырғасына тиісті, ендеше, оларға сәйкес екі теңсіздік осы нүктеде теңдікке айналады. Оның төбесінен өзгеше және көпбұрыштың қабырғасына тиісті кез келген нүкте сәйкес теңсіздікті теңдікке айналдырады. Ал, дөңес көпбұрыштың кез келген ішкі нүктесі жүйенің әр теңсіздігінің шешімі болады.

III. А.В. Погорелов оқулығына осы мақсатпенен келесі толықтырулар енгізуге болады. Бұл оқулықтың 75 пунктінде №35 есеп қарастырылып $x+2y-1=0$ теңдеумен берілген түзу қарастырылады. Енді осы есепті әрі қарай дамытайық:

Мысал №2: $x+2y-1= 0$ теңдеуімен берілген түзу жазықтықты қандай бөліктерге бөледі деген сұрақ қоялық.

Оқушының іс-әрекетін көрсетейік: Алдыңғы мәліметтер бойынша бұл түзу жазықтықты келесі екі жартыжазықтыққа бөледі: $x+2y-1>0$, $x+2y-1<0$.

Бірінші жартыжазықтыққа $M_1(1;1)$, $M_2(2,3)$, $M_3(0;1)$ нүктелері тиісті, өйткені $1+2 \cdot 1-1>0$, $2+2 \cdot 3-1>0$, $0+2 \cdot 1-1>0$... . Ал екінші жартыжазықтыққа $N_1(-1;-1)$, $N_2(0;-2)$, $N_3(-2;0)$ ... нүктелері тиісті, өйткені $-1+2 \cdot (-1)<0$, $0+2 \cdot (-2)-1<0$, $-2+2 \cdot 0-1<0$... .

Осындай мақсатты осы оқулықтың басқа да есептеріне де қоюға болады. (§8, есеп: №36, 37, 38, 39) екен.

Енді, келесі түзулердің қиылысу нүктесін табу керек деген есепті қарастырайық (2, есеп № 40): 1) $x+2y+3=0$ және $4x+5y+6=0$; 2) $3x-y-2=0$ және $2x+y-8=0$; 3) $4x+5y+8=0$ және $4x-2y-6=0$. Осы есептердің біріншісін қарастырайық:

Окушының іс-әрекеті: Берілген екі түзудің қиылысу нүктесін табады A(1;-2).

Жалпы алынғанда жазықтық төрт бөлікке бөлініп тұр. Есептеу арқылы алдыңғы төрт бұрышты сипаттайтын теңсіздіктерді жаз деген қосымша міндет қоямыз. Мұғалім, окушыдан келесі жазуларды талап етеді:

$M_1(0;0)$ нүктесі үшін $x+2y+3>0$ (AB)

$M_2(0;-2)$ нүктесі үшін $x+2y+3<0$ (AB)

$M_1(0;0)$ нүктесі үшін $4x+5y+6>0$ (AC)

$M_2(0;-2)$ нүктесі үшін $4x+5y+3<0$ (AC)

Ендеше, $M_1(0;0)$ нүктесі жатқан бұрыш үшін $x+2y+3>0$ және $4x+5y+6>0$; $M_2(0;-2)$ нүктесі жатқан бұрыш үшін $x+2y+3<0$ және $4x+5y+3<0$. Басқа да жағдай болуы мүмкін, мысалы зерттеу арқылы окушы мынадай жағдайға келеді: $M_3(-2;0)$ нүктесі үшін $x+2y+3>0$, ал $M_3(-2;0)$ нүктесі үшін $4x+5y+3<0$, яғни $M_3(-2;0)$ нүктесі жатқан бұрыш үшін $x+2y+3>0$, $4x+5y+3<0$ жүйесімен сипатталады және т.с.с.

Жаттығу ретінде №40 (б,в) есептерін оқушыларға тапсырған дұрыс болады. Мұндай жаттығулар оқушыларды күрделі есептерді шешуге дайындайды.

Мысал №3: ABC үшбұрышы төбесінің координаталарымен берілген A(–4,–2), B(0,0), C(0,–2). Осы ABC үшбұрышын анықтайтын сызықты теңсіздіктер жүйесін тап.

Оқушының іс-әрекетінің жоспарын келтірейік:

*– үшбұрыштың ішінде жататын кез келген M(x,y) нүктесін аламыз;*

*– үшбұрыштың қабырғаларының теңдеуін жазамыз;*

*– әр қабырға жазықтықты екі жартыжазықтыққа бөледі;*

*– AC түзуін алайық, ол жазықтықты екі жартыжазықтыққа бөледі. Оның біреуіне B төбесі және M(x,y) төбесі тиісті. Ендеше, B нүктесінің және M(x,y) нүктесінің координаталарын қанағаттандыратын AC түзуін анықтайтын өрнектің таңбалары бірдей болады (өйткені, олар бір жартыжазықтыққа тиісті);*

*- осылай AB, BC түзулерімен жұмыс істейміз;*

*- әр түзу үшін бір-бірден теңсіздік пайда болады;*

*- пайда болған үш теңсіздікті бір жүйеге жазамыз.*

Енді есепті шешудің үлгісін көрсетейік.

1) Үшбұрыштың қабырғаларының теңдеуін жазып алу керек. Ол үшін түзудің $y=kx+b$ формуласын қолданған ыңғайлы.

(AB):$x-2y=0$ осылай қалған екі түзудің теңдеуін жазамыз:

(BC): $x=0$

(AC): $y+2=0$

2) AB түзуі жазықтықты екі жартыжазықтыққа бөледі. Олардың біреуінде M(x; y) және C(0;–2) нүктелері орналасқан. Енді, C(0;–2) нүктесінің координаталарын (AB) түзуін анықтайтын өрнектегі айнымалыларының орнына қойып, оның таңбасын анықтаймыз: $0-2(-2)>0$, яғни бұл өрнектің мәні оң мән қабылдады. Ендеше, $x-2y>0$ өрнегі осы жартыжазықтықта жатқан барлық нүктелерді сипаттайды.

3) BC түзуі де жазықтықты екі жартыжазықтыққа бөледі. Олардың біреуінде M(x, y) және A(–4;–2) нүктесі орналасқан. Енді, тағы да A(–4;–2) нүктесінің координаталарын (BC) түзуін анықтайтын өрнектегі айнымалылардың орнына қойып, оның таңбасын анықтаймыз: $-4<0$, яғни бұл өрнектің мәні теріс мәнге ие болды. Онда, $x<0$ өрнегі осы жартыжазықтықта жатқан барлық нүктелерді сипаттайды.

4) AC түзуі де жазықтықты екі жартыжазықтыққа бөледі. Олардың біреуінде M(x; y) және B(0;0) нүктесі орналасқан. Енді B(0;0) нүктесінің координаталарын (AC) түзуін анықтайтын өрнектегі айнымалылардың орнына қойып, оның таңбасын анықтаймыз: $0+2>0$, яғни бұл өрнектің мәні оң мәнге ие болды. Онда, $y+2>0$ өрнегі осы жартыжазықтықта жатқан барлық нүктелерді сипаттайды. Сонымен, ABC үшбұрышының ішкі нүктесі болып табылатын M(x;y) нүктесін келесі үш теңсіздіктен тұратын жүйе сипаттайды: $x-2y\geq 0$, $x\leq 0$, $y+2\geq 0$.

Оқушылардың өз еркімен шешуі үшін келесі жаттығуларды ұсынуға болады.

Үшбұрыштың төбесі берілген $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Осы үшбұрыштың ішкі облысының аналитикалық өрнегін жаз.

| | A | | B | | C | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ | $x_3$ | $y_3$ |
| 1 | 1 | 1 | 7 | 4 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | -3 | 4 | -2 | 5 |
| 3 | -1 | 1 | 5 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | -1 | 1 | -7 | 4 | -4 | 5 |
| 5 | 1 | -1 | 7 | 2 | 4 | 5 |
| 6 | 1 | -1 | -5 | 4 | -2 | 5 |
| 7 | -1 | -1 | 5 | 2 | 2 | 3 |
| 8 | -1 | -1 | -7 | 2 | -4 | 3 |
| 9 | 0 | 1 | 6 | 4 | 3 | 5 |
| 10 | 1 | 0 | 7 | 3 | 4 | 4 |

Енді, көпбұрыштардың дөнес болу шартын қарастырайық.

Мысал №4: A(-4;0), B(-2;8), C(15;13), D(0;-3) нүктелері берілген. Осы нүктелермен анықталатын төртбұрыштың дөнес екенін көрсет.

**Талқылау.** Төртбұрыш дөнес төртбұрыш болады, егер «көпбұрыш оның қабырғасын қамтитын кез келген түзуге қарағанда бір жартыжазықтықта жатса» (2,201 бет). Сонымен, алдымен төртбұрыштың қабырғасын қамтитын түзулерді табамыз. Сосын, нүктенің жартыжазықтыққа тиісті болу шартын пайдаланамыз.

Оқушының іс-әрекеті:

1) Төртбұрыштың қабырғаларын қамтитын түзулердің теңдеуін жазамыз. Ол үшін тағы да түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген тәсілін пайдаланамыз:

(AB): $4x-y+16=0$

(BC): $5x-17y+146=0$

(CD): $16x-15y-45=0$

(DA): $3x+4y+12=0$

2) (AB) түзуі жазықтықты екі жартыжазықтыққа бөледі. Бұлардың біреуіне C және D нүктелері тиісті, өйткені $4x-y+16=4\cdot 5-13+16>0$, $4x-y+16=4\cdot 0-3+16>0$.

Ендеше, $4x-y+16>0$. Осылай басқа түзулерді зерттеп келесі теңсіздіктер жүйесін аламыз: $4x-y+16>0$,

$5x-17y+146>0$, $16x-15y-45<0$, $3x+4y+12>0$. Яғни ABCD төртбұрышы дөнес төртбұрыш болды.

Жаттығу ретінде келесі есептерді ұсынуға болады.

№1. A(0;0), B(7;-6), C(5;0), D(8;7). ABCD төртбұрышы дөнес, не дөнес емес төртбұрыш болатынын анықта.

№2. ABCD төртбұрышы төбелерінің координаталарымен берілген A(-4;0), B(-2;8), C(12;0), D(3;-6). Осы төртбұрыштың дөнес екенін көрсет.

№3. A(-3;1), B(5;-5), C(4;5), D(-3;3). Осы нүктелермен берілген төртбұрыштың ішкі облысының аналитикалық өрнегін жаз.

№ 4. A(4;-8), B(9;-2), C(2;9), D(-5;4), E (–4; 6). Осы нүктелер берілген көпбұрыштың дөнес екендігін көрсететін теңсіздіктер жүйесін жаз.

## ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР:

1. Геометрия: Орта мектептің 7-9 сыныптарына арналған оқулық **Л.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов** және т.б. 2- басылым - Алматы: Рауан, 1996. - 336 бет.

2. **Погорелов А.В.** Геометрия: Орта мектептің 7-11 сыныптарына арналған оқулық. 2-басылым. - Алматы: Рауан, 1995.-384 бет.