ISSN 1811-1807

ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

С. ТОРАЙҒЫРОВ АТЫНДАҒЫ ПАВЛОДАР МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

3'2007

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ

ПМУ хабаршысы
Вестник ПГУ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета им. С. Торайгырова

1997 жылы құрылған
Основан в 1997 г.

ПМУ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК ПГУ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

3 2007

Научный журнал Павлодарского государственного университета
им. С. Торайгырова

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№ 4532-Ж
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31 декабря 2003 года

УДК 512.54

ОБ ОПЕРАЦИИ КОММУТИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ

С.Н. Ермолаева, И.И. Павлюк
Палодарский государственный университет им. С.Торайгырова, г. Павлодар

Жұмыста G тобының элементтерін коммутирлау операциясының қасиеттілігін зерттеген.

В работе авторы изучили свойства операции коммутирования элементов группы G.

In the work authors studied behavior of commutation operation of group G elements.

В работе [1] авторы изучили свойства операции «*» сопряжения заданной на элементах группы G –

$$(\forall a, x \in G)((a * x) \overset{Def}{\Leftrightarrow} (a^x = x^{-1}ax)) \qquad (1)$$

Это одна из неосновных бинарных операций существующих на элементах группы G. Определение этой операции существенно использует бинарное отношение «$_c\equiv$» сопряжения элементов группы. Это отношение было введено в алгебру Г.Фробениусом (см. [2] с.22) в 1895 году и с тех пор оно остается одним из основных понятий теории групп.

Символ «$_c\equiv$» для обозначения отношения сопряжения элементов группы G ($a \,_c\!\equiv b) \overset{Def}{\Leftrightarrow} (\exists x \in G (a^x = b))$) введен первым автором настоящей статьи в [3]. Там же исследованы некоторые групповые сравнения относительно указанного отношения и изложены базовые компоненты теории сравнений в группах. Операция «*» не ассоциативна ([1] Предложение 2) и не коммутативна (это следует из теоремы работы [1]). Особенность этой операции заключается в том, что нетривиальные элементы группы могут коммутировать относительно нее, а сама группа относительно этой операции не коммутативна. Понятно, что такая операция отличается от главной операции группы.

В статье [1] не изучены группы, в которых ассоциативна операция сопряжения. Теорема 1 работы дает полное описание групп с ассоциативной бинарной операцией. Такие группы абелевы. Верна и обратная теорема. Теорема 6 работы дает описание групп с коммутативной операцией «$\circ$» коммутирования. Такие группы абелевы. Верна также обратная теорема. В Теореме 8 и Следствии 9 найдены условия, при которых операция «$\circ$» коммутирования ассоциативна. Далее найдена качественная зависимость между изученными операциями (Теорема 12, 13). Обозначения в работе стандартные (см. [4, 5]).

Определение 1[1] Пусть G – группа. Бинарной операцией «сопряжения» (*) заданной на элементах группы G назовем отображение $G \times G \to G$ ставящее в соответствии каждой паре <a, x > элементов группы G взятых в указанном порядке, некоторый третий элемент $a^x = x^{-1}ax$ сопряженный элементу а, где x^{-1} элемент обратный к элементу x в группе G.

Предложение 1. Для произвольных элементов a, b, c в группе G верно равенство $(a^b)^c = a^{bc}$ [1].

Предложение 2. В группе G верна формула $(\forall g \in G)(a^g = b^g) \Leftrightarrow (a = b)$.

Теорема 3. В группе G операция * тогда и только тогда ассоциативна, когда группа G абелева.

Теорема 4. Если операция «*» коммутативна на элементах группы G, то группа G абелева.

Определение 2. Пусть G – группа. Бинарной операцией «коммутирования» («$\circ$») заданной на элементах группы G назовем отображение $G \times G \to G$, ставящее в соответствии каждой паре <a, b > элементов a,b$\in$G взятых в указанном порядке, некоторый третий элемент $a^{-1}a^b \in G$, где a^{-1} элемент обратный к элементу а, а $a^b = b^{-1}ab$ - элемент сопряженный с элементом а посредством элемента b. Таким образом, в группе G принимается верной формула:

$$(\forall a,b \in G)(a \circ b \overset{def}{=} a^{-1}a^b) \qquad (2)$$

Предложение 5. Операция коммутирование не коммутативна на элементах произвольной группы.

Теорема 6. Операция «$\circ$» коммутативна на элементах группы G тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Предложение 7. Операция коммутирования на элементах группы G не ассоциативна.

Теорема 8. Если решения $R(bax = ab)$ групповых сравнений $(\forall a,b \in G)(bax = ab)$, принадлежат центру $Z(G)$ группы G, то операция «$\circ$» коммутирования заданная на элементах группы G ассоциативна.

Следствие 9 Если коммутант G' группы G содержится в центре $Z(G)$ группы G, то операция коммутирования «$\circ$» элементов группы G ассоциативна.

Предложение 10 Только нейтральный элемент группы G обладает нейтральным элементом в группе G относительно операции «$\circ$» коммутирования.

Следствие 11 Пусть G – группа. e – нейтральный элемент. Тогда верна формула $(\forall a \in G)\ a \circ e = e \circ a = e)$, т.е. для нейтрального элемента группы G любой ее элемент является нейтральным относительно операции коммутирования.

Теорема 12 Если операция «*» коммутативна на элементах группы G, то операция «$\circ$» также коммутативна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлюк И.И., Ермолаева С.Н. Операция сопряжения элементов группы // Вестник ПГУ. Серия физико – математическая №3;- 2005.- С.95-98

2. Фробениус Г. Теория характеров и представлений групп. ОНТИ. Научно – технической издательство Украина.- Харьков; 1937. 214 с.

3. Павлюк И.И., Павлюк Ин.И. К теории сравнений в группах // Вестник ПГУ. Серия физико – математическая.- №3.- 2004.- С.34-49

4. Курош А.Г. Теория групп.- М.; Наука, 1967- 650 с.

5. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.- М.; Наука,1982-288 с.