НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ПАВЛОДАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.С.ТОРАЙГЫРОВА

4'2003

ПМУ хабаршысы
Вестник ПГУ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 378.146:51

МАТЕРИАЛЫ ОПОРНЫХ КОНСПЕКТОВ ПО ИНТЕГРИРОВАННОМУ КУРСУ «МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА, АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ»

Б.Н. Дроботун, Г.С. Джарасова

Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова

Жұмыста [1]-де келтірілген математикалық пәндер бойынша тірек конспектілерінің түрі мен мазмұн ерекшеліктері туралы нұсқауларды іске асырудың нақты мысалы ретінде «Жиын, логика және аксиоматикалық теориялар» пәнінің «Эквиваленттік қатынас» тақырыбы бойынша тірек конспектісінің материалдары ұсынылады.

В работе предлагается, в качестве конкретной реализации положений по форме и содержанию опорных конспектов по математическим дисциплинам, высказанных авторами в [1], материалы опорного конспекта по теме «Отношение эквивалентности» интегрированной дисциплины «Множества, логика, аксиоматические теории».

Materials of supporting transcripts on topic «Equivalency relation» of the integrated discipline «Regions, logic and axiomatic theories» as the concrete realization of statements concerning form and contents of supporting transcripts on mathematical disciplines expressed by authors in [1], are presented in the work.

§1. Данная работа является непосредственным продолжением работы [1]. Имея определенный опыт разработки опорных конспектов по логико-алгебраическим дисциплинам, авторы, не желая оставаться голословными, сочли нужным дать практическую реализацию основных положений по форме и содержанию опорных конспектов, высказанных в работе [1], в виде реального конспекта по конкретной теме конкретной дисциплины. В качестве дисциплины был взят интегрированный курс «Множества, логика, аксиоматические теории» учебная программа, структура и содержание которого разработаны авторами и который на протяжении ряда лет читался ими для студентов обучающихся по специальностям «Математика и информатика» и «Информатика». Выбор обусловлен тем, что этот курс является теоретическим и методологическим обеспечением как дисциплины «информатика», так и дисциплин, непосредственно с нею связанных, и служит пропедевтической основой изучения последующего курса «Дискретная математика». В качестве темы взята тема «Отношения эквивалентности». Выбор именно этой темы мотивирован тем, что отношения эквивалентности являются наиболее распространенными в математике. Кроме того, отношение эквивалентности лежит в основе одного из наиболее общих, характерных не только для математики, но и для всей науки в целом – метода «определения через абстракцию».

§2. Изложение материала темы будет осуществляться в соответствии со следующим планом: 1. Бинарные отношения и способы их задания. 2. Операции над бинарными отношениями. 3. Свойства бинарных отношений. 4. Отношение эквивалентности. 5. Разбиение множества. Фактор-множество. Теорема о соответствии. 6. Теорема о представлении отображений.

1. Двухместное отношение P на множестве $A \neq \varnothing$ называется бинарным отношением (т.е. $P \subseteq A^2 = A \times A$). Бинарные отношения на конечном множестве $A = \{a_1; a_2; ...; a_m\}$ удобно задавать а) таблицами; б) графиками; в) графами; г) сечениями [2].

В случае а), элементы множества A^2 записываем в квадратную таблицу, имеющую из *n* строк и *n* столбцов так, что элемент $(a_i; a_j)$ ставится на пересечение i –ой строки и j –го столбца $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n)$. В этой таблице отмечаем те клетки, в которых расположены пары $(a_i; a_j) \in P$.

В случае б), на осях декартовой системы координат выбираем по *n* точек, которые ставим в соответствие элементам множества A. Отмечаем те точки декартовой плоскости, для которых $(a_i; a_j) \in P \quad (a_i P a_j)$.

В случае в), на плоскости (в общем случае, произвольно) выбираем *n* точек и ставим их в соответствие элементам множества A. Если $(a_i P a_j)$, то из точки, соответствующей элементу a_i проводим стрелку в точку, соответствующую элементу a_j.

В случае г), для каждого элемента $a_i \in A$ выписываем подмножество $[a_i]_P = \{a_j / a_j \in A \,\&\, a_i P a_j\}$. Подмножество $[a_i]_P \subseteq A$ называется сечением отношения P по элементу a_i.

Пример 1. Пусть $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4\}$. Тогда:

$$A^2 = \{<a_1;a_1>;<a_1;a_2>;<a_1;a_3>;<a_1;a_4>;<a_2;a_1>;<a_2;a_2>;<a_2;a_3>;<a_2;a_4>;$$
$$<a_3;a_1>;<a_3;a_2>;<a_3;a_3>;<a_3;a_4>;<a_4;a_1>;<a_4;a_2>;<a_4;a_3>;<a_4;a_4>\}$$

Если

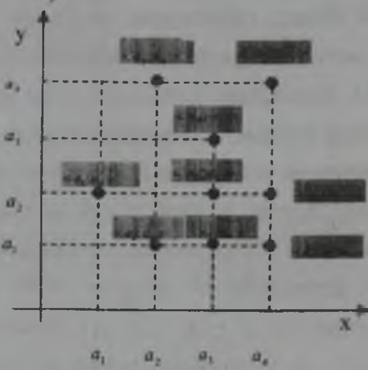
$$P = \{<a_1;a_2>;<a_2;a_1>;<a_2;a_4>;<a_3;a_1>;<a_3;a_2>;$$
$$<a_3;a_3>;<a_4;a_1>;<a_4;a_2>;<a_4;a_4>\}$$

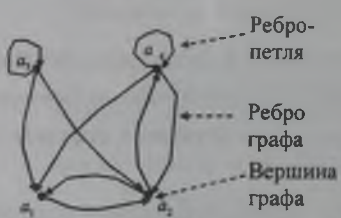
то представления а), б), в), г) будут иметь вид:

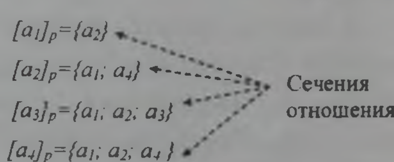
а)

B / A	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	$< a_1; a_1 >$		$< a_1; a_3 >$	$< a_1; a_4 >$
a_2		$< a_2; a_2 >$	$< a_2; a_3 >$	
a_3				$< a_3; a_4 >$
a_4			$< a_4; a_3 >$	

б)







в) г)

Рис. 1

2. Пусть P и Q – бинарные отношения на множестве A.

2.а. *Композицией (произведением)* отношений P и Q называется бинарное отношение $P \circ Q$, определенное на множестве A^2 по правилу:

$$P \circ Q = \left\{< x; y > / < x; y > \in A^2 \ \& \ (\exists z \in A)\left(< x; z > \in P \& < z; y > \in Q\right)\right\}$$

2.б. *Обратным* к бинарному отношению P называется бинарное отношение P^{-1}, определенное на множестве A по правилу:

$$P^{-1} = \left\{< x; y > / < x; y > \in A^2 \& < y; x > \in P\right\}.$$

Образное представление об этих операциях дают диаграммы (фрагменты графов):

2.а 2.б

Рис. 2

2.с. Так как отношения P иQ – подмножества A^2, то над ними можно производить и теоретико-множественные операции: $\cap; \cup; \backslash$.

Упражнение 1. [3] Доказать, что для любых бинарных отношений $P;Q;R$ определенных на множестве A выполняются тождества:

1) $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$
2) $(P\circ Q)^{-1}=Q^{-1}\circ P^{-1}$
3) $\left(P^{-1}\right)^{-1}=P$
4) $(P\cup Q)^{-1}=P^{-1}\cup Q^{-1}$
5) $(P\cap Q)^{-1}=P^{-1}\cap Q^{-1}$
6) $(P\cup Q)\circ R=(P\circ R)\cup(Q\circ R)$
7) $(P\cap Q)\circ R\subseteq(P\circ R)\cap(Q\circ R)$

Указание. Для тождеств 1)-6) применить метод включений. Докажем, для примера, тождество 5). Для этого нужно доказать два включения

а) $(P\cap Q)^{-1}\subseteq P^{-1}\cap Q^{-1}$ и б) $P^{-1}\cup Q^{-1}\subseteq(P\cup Q)^{-1}$. Докажем а). Пусть $<x;y>\in(P\cap Q)^{-1}\Rightarrow<y;x>\in P\cap Q\Rightarrow<y;x>\in P\&<y;x>\in Q\Rightarrow<x;y>\in P^{-1}\&<x;y>\in Q^{-1}\Rightarrow$ $<x;y>\in P^{-1}\cup Q^{-1}$.

3. Определение 2.Бинарное отношение P, заданное на множестве A называется:

1) ***рефлексивным***, если $(\forall x\in A)(xPx)$;
2) ***симметричным***, если $(\forall x;y\in A)(xPy\Rightarrow yPx)$;
3) ***антисимметричным***, если $(\forall x;y\in A)(xPy\ \&\ yPx\Rightarrow x=y)$;
4) ***транзитивным***, если $(\forall x;y;z\in A)(xPy\ \&\ yPz\Rightarrow xPz)$;
5) ***связным***, если $(\forall x;y\in A)(xPy\vee yPx)$.

Простейшим примером рефлексивного отношения на множестве A является отношение $d_A=\{<x;x>/x\in A\}$, которое называется *диагональю* множества A. (Почему?)

Упражнение 2. Пусть P – бинарное отношение на множестве A. Доказать, что отношение P является:

1) рефлексивным $\Leftrightarrow$ $d_A\subseteq P$;
2) симметричным $\Leftrightarrow$ $P^{-1}=P$;
3) антисимметричным $\Leftrightarrow$ $P\cap P^{-1}\subseteq d_A$;
4) транзитивным $\Leftrightarrow$ $P\circ P\subseteq P$

Свойства бинарного отношения P легко проследить на представляющих его таблице, графике, графе. Например, наличие ребра-петли у каждой вершины графа говорить о рефлексивности отношения P, представленного этим графом; симметрия графика относительно прямой $y=x$ говорит о симметричности отношения, представленного этим графиком.

Упражнение 3. Для каждого из способов задания а), б), в) бинарного отношения указать характерный признак, отражающий любое из свойств 1) – 5) определения 1.

4. Определение 2. Бинарное отношение P на множестве A называется ***отношением эквивалентности***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности:

а) Отношение «быть в одной группе» на множестве студентов университета;

б) отношение подобия на множестве всех треугольников плоскости;

в) отношение равновеликости на множестве всех плоских фигур;

г) отношение равносильности на множестве всех формул алгебры высказываний;

д) отношение параллельности на множестве всех прямых плоскости.

С каждым отображением $\varphi : A \to A$ можно связать бинарное отношение φ^* на множестве A, определенное по правилу:

$$(\forall a; b \in A)(a\varphi^* b \Leftrightarrow \varphi(a) = b)$$

Отношение φ^* называется *графиком* отображения φ.

Упражнение 4. Пусть $f : A \to B$. Доказать, что $(f \circ f^{-1})^*$ - отношение эквивалентности на A.

Указание. Показать, что $(\forall a; b \in A)(a(f \circ f^{-1})^* b \Leftrightarrow f(a) = f(b))$

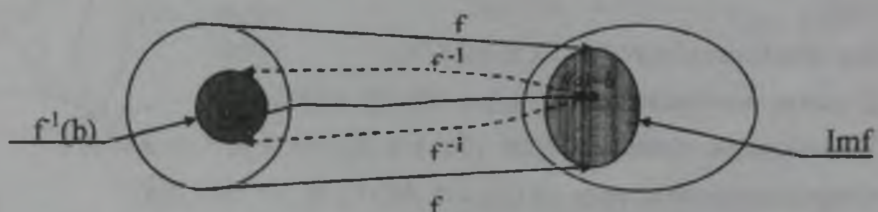


Рис. 3

Отношение $(f \circ f^{-1})^*$ называется отношением равнообразности (см. рис.3).

Упражнение 5. Пусть P_1 и P_2 – отношения эквивалентности на множестве A. Доказать, что:

1) $P_1 \cap P_2$ – отношение эквивалентности;

2) $P_1 \cup P_2$ – отношение эквивалентности $\Leftrightarrow$ $P_1 \cup P_2 = P_1 \circ P_2$;

3) $P_1 \circ P_2$ – отношение эквивалентности $\Leftrightarrow$ $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$.

Указание. Использовать упражнение 1. Например, в 3) пусть $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$. Тогда $(P_1 \circ P_2)^{-1} = P_2^{-1} \circ P_1^{-1} = P_2 \circ P_1 = P_1 \circ P_2$, т.е. отношение $P_1 \circ P_2$ симметрично.

5. Определение 3. Система непустых подмножеств Σ множества M называется разбиением этого множества, если:

1) $\bigcup\limits_{X \in \Sigma} X = M$, 2) $(\forall X; У \in M)(X \cap У \neq \varnothing \Rightarrow X = У)$.

Пример 2. Пусть $M = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$. Тогда система подмножеств $\Sigma = \{\{a_1; a_3\}; \{a_2; a_4; a_6\}; \{a_5\}\}$ есть разбиение множества M.

Пусть Σ - разбиение множества A. Определим по разбиению Σ бинарное отношение P_Σ на множестве A по правилу:

$$(\forall a; b \in A)(aP_\Sigma b \Leftrightarrow (\exists X \in \Sigma)(a \in X \,\&\, b \in X))$$

По разбиению Σ примера 2 найдем отношение P_Σ и построим граф этого отношения.

$$P_\Sigma = \{<a_1;a_1>;<a_1;a_3>;<a_3;a_1>;<a_3;a_3>;<a_2;a_2>;<a_2;a_4>;<a_4;a_2>; <a_2;a_6>;<a_6;a_2>;<a_4;a_4>;<a_4;a_6>;<a_6;a_4>;<a_6;a_6>;<a_5;a_5>\}$$

Рис. 4

Характер расположения стрелок (ребер) графа говорит о том, что граф, изображенный на рис. 4., является графом отношения эквивалентности. Аналогичный результат имеет место в общем случае.

Предложение 1. Если Σ – разбиение множества Σ, то P_Σ – отношение эквивалентности.

Предложение 2. Пусть P – отношение эквивалентности на множестве A и $a \in A$. Положим $[a]_P = \{b/b \in A \,\&\, aPb\}$. Тогда:

а) $(\forall a \in A)(a \in [a]_P)$;

в) $(\forall a;b \in A)([a]_P \cap [b]_P \neq \varnothing \Rightarrow [a]_P = [b]_P)$;

б) $(\forall a;b \in A)(aPb \Leftrightarrow [a]_P = [b]_P)$;

г) $A = \bigcup\limits_{a \in A} [a]_P$.

Предложение 2 показывает, что если P – отношение эквивалентности на множестве A, то система подмножеств $\{[a]_P / a \in A\}$ является разбиением множества A, при этом подмножество $[a]_P (a \in A)$ называется *классом эквивалентности*, порожденным элементом а; множество $\{[a]_P / a \in A\}$ всех классов эквивалентности называется ***фактор-множеством*** множества A по отношению P и обозначается через A/P.

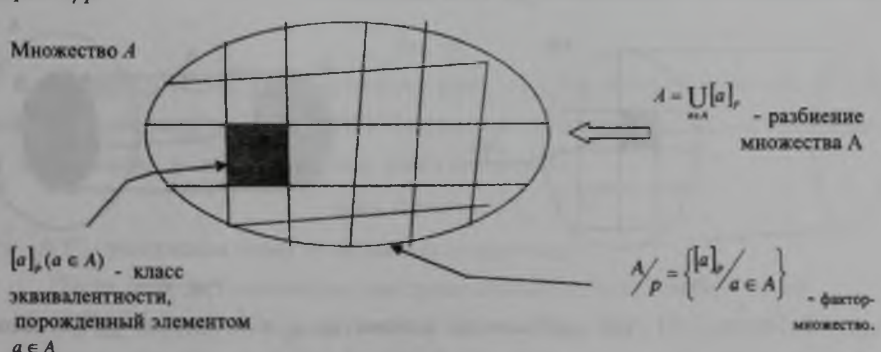


Рис. 5

Пример 3. Пусть A – множество всех точек декартовой плоскости. Определим бинарное отношение S на A по правилу: $(\forall p_1;p_2 \in A)(p_1 S p_2 \Leftrightarrow$ точки p_1 и p_2 находятся на одном и том же расстоянии от начала координат) (см. рис.6.).

<u>Пример 4.</u> Пусть A – множество всех рабочих некоторого предприятия N. Определим на A бинарное отношение P по правилу:

$(\forall x; y \in A)(xPy \Leftrightarrow$ рабочие x и y имеют одну и ту же профессию).

Очевидно, что P – отношение эквивалентности. Если $a \in A$, то $[a]_P$ – множество рабочих имеющих одну и ту же профессию; A/p – множество всех тех профессий, которые имеют рабочие предприятия N.

На этом примере нетрудно проследить выполнение условий а)-г) предложения 1.

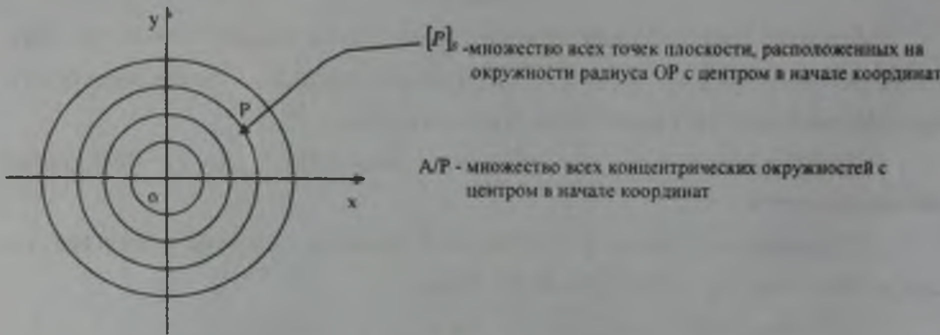


Рис. 6

Пусть Σ – совокупность всех разбиений множества A и **P** – совокупность всех отношений эквивалентности, определенных на множестве A.

<u>Теорема 1</u> (о соответствии). Отображение $\varphi : \Sigma \to \mathbf{P}$, определенное по правилу: $(\forall \Sigma \in \Sigma)(\ \varphi(\Sigma) = P_\Sigma)$ является биективным отображением Σ на **P**, при этом $A/p_\Sigma = \Sigma$ для любого $\Sigma\ \in \Sigma$.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех разбиений множества A и совокупностью всех отношений эквивалентности, определенных на этом множестве.

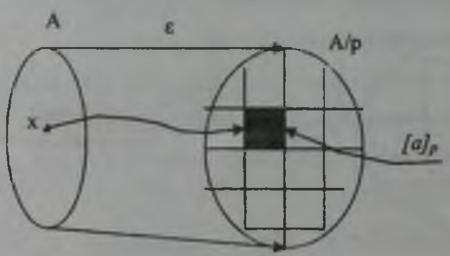


Рис. 7

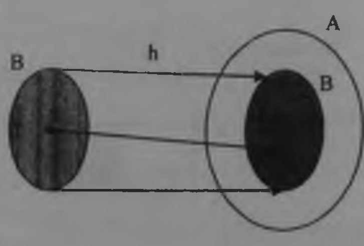


Рис. 8

6. Пусть $f : A \to B$ отображение множества A в множество B. Согласно упражнения 4, бинарное отношение $P = (f \circ f^{-1})^*$ является отношением эквивалентности на множестве A. Согласно этого упражнения, $aPb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ для любых $a, b \in A$.

Отображение $\varepsilon : A \to A/p$ определенное по правилу: $(\forall a \in A)(\varepsilon(a) = [a]_p)$ называется *естественным* отображением. Очевидно, что ε – сюръекция (рис.7.).

Пусть $B \subseteq A$ Отображение $h : B \to A$ определенное по правилу $(\forall b \in B)(h(b) = b)$ называется *вложением* подмножества B в A. Очевидно, что всякое вложение является инъекцией (рис.8.).

<u>Теорема 2.</u> (о представлении отображений). Пусть $f : A \to B$ - произвольное отображение множества A в множество B. Тогда для f существует представление $f = \varepsilon \circ f^* \circ h$ в виде композиции трех отображений, где ε – естественное отображение (сюръекция A на A/p); f^* - биективное отображение A/p на Imf и h – вложение Imf в В.

Т.е. $(\varepsilon \circ f^* \circ h)(x) = h(f^*(\varepsilon(x)))$ для любого $x \in A.$, где $\varepsilon(x) = [x]_p$; $f^*([x]_p) = f(x)$; $h(f(x)) = f(x)$. (см. рис.9.)

Таким образом, любое отображение представляется в виде 3-х отображений: сюръекции, биекции и инъекции, т.е. теорема о представлении выявляет роль этих отображений, как базовых (атомных) в совокупности всех отображений.

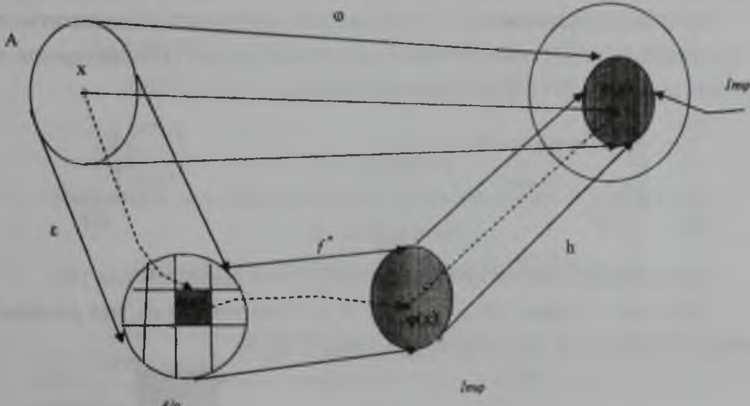


Рис. 9

<u>Пример 5.</u> Пусть M – множество всех точек плоскости с веденной на ней декартовой системой координат ХОУ. Определим отображение $f : M \to R$ множества M в множество R действительных чисел по правилу:

$$(\forall P \in M)(f(P) = |OP|)$$

(т.е. $f(P)$ - расстояние точки P от начала координат).

Тогда $Imf = R_+$ - множество неотрицательных действительных чисел;

$p_1 P p_2 \Leftrightarrow |Op_1| = |Op_2|$ для любых точек $p_1; p_2 \in M$; M/p – множество концентрических окружностей с общим центром в начале координат, то ε (р) – окружность с центром в начале координат радиуса $|Op|$ (символически $O_{|Op|}$; $f^*(O_{|Op|}) = |Op|$; $h(|Op|) = |Op|$). (см. пример 3.)

Пример 6. Пусть R – множество действительных чисел (множество точек координатной прямой). Определим отображение $\varphi : R \to R$ по правилу $(\forall x \in R)(\varphi(x) = x - [x]$, где $[x]$ - целая часть числа x.

Тогда $\operatorname{Im}\varphi = [0;1)$ – множество точек полуинтервала $[0;1)$; $x_1 P x_2 \Leftrightarrow (x_1 - [x_1] = x_2 - [x_2])$ для любых $x_1; x_2 \in R$, т.е. числа x_1 и x_2 имеют одинаковые дробные части; $R/p = \{\{n + \alpha / n \in Z\} / \alpha \in [0;1)\}$ (класс эквивалентности $[x]_P = \{n + \alpha / \alpha = x - [x], n \in Z\}$ для некоторого $\alpha \in [0;1)$ наглядно можно представить так:

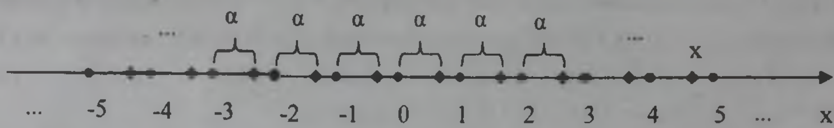
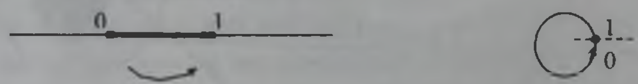


Рисунок 10

ромбиками отмечены числа класса $[x]_p$); $\varepsilon(x) = \{n + (x - [x]) / n \in Z\}$, т.е. $\alpha = x - [x]$; $f^*(\{n + (x - [x]) / n \in Z\}) = x - [x]$; $h(x - [x]) = x - [x]$.

Заметим, что совокупность представителей всех классов эквивалентности – это полуинтервал [0;1). Окружность, полученная из этого полуинтервала дает образное представление о фактор-множестве M/p.



(а) (б)

Рис. 11

Упражнение 6. Рассмотреть двумерный случай примера 6. (см. [4]).

Указание. См. рис. 12; рис. 13 (а, б, в). Отметим также, что рисунок 12 двумерный аналог рис. 10, а рисунок 13 – рис. 11 (а, б).

Рис. 12

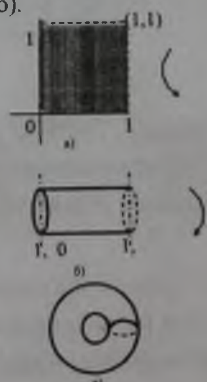


Рис. 13

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроботун Б.Н., Джарасова Г.С. Роль и место опорных конспектов в системе составляющих методического обеспечения учебного процесса.//Вестник ПГУ.– №3.–2002.

2. Фор К., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика, М.: Мир, 1966.

3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М.: Наука, 1975.

4. Кострикин А.И. Введение в алгебру, М.: Наука, 1977.