ISSN 1811-1807

ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік
университеті

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ

1-2′ 2012

ПМУ ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК ПГУ

ISSN 1811-1807. Вестник ПГУ

Научный журнал Павлодарского государственного университета
имени С. Торайгырова

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№ 4533-Ж
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31 декабря 2003 года

УДК 534.2:537.2

С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.Б. БЕЛЯЛОВА

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ 222

В данной статье рассматриваются закономерности распространения электроупругих волн в пьезокристаллах ромбической сингонии класса 222. Для изучения используется теоретический метод, основанный на построении структуры матриканта полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения для анизотропных диэлектрических сред. Метод матриканта позволяет качественно изучать процессы распространения гармонических электроупругих волн в анизотропных средах всех классов. [1,2,3]

Система уравнений Максвелла при равенстве нулю объемной плотности зарядов ρ и вектора плотности токов j запишем следующим образом:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$
$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \qquad (1)$$
$$div\vec{B} = 0;$$
$$div\vec{D} = 0$$

Уравнениями движения упругой анизотропной среды имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (2)$$

Компоненты электрической и магнитной индукции выражаются в следующим виде:

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + э_{ik}E_k \,, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{3}$$

где e_{ikl} - пьезоэлектрические постоянные, связывающие электрическое поле с механическими напряжениями; $э_{ik}$ - компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l})$ - тензор деформации;

В случае пьезокристаллов система уравнений (1-3) рассматривается совместно с определяющим соотношением между напряжением и деформацией, которое будет содержать дополнительное слагаемое, связанное с электрическим полем [1]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{l,k} - e_{ikl}E_k \tag{4}$$

где c_{ijkl} - упругие жесткости, □- плотность среды.

На основе метода разделения переменных система уравнений (1-4) может быть приведена к эквивалентной системе 1-го порядка, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \quad \vec{u} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \tag{5}$$

где u_i, σ_{iz} – компоненты вектора смещения и тензора напряжения; E_y, H_x, H_y, E_x - компоненты электрических и магнитных полей; k_x, k_y – соответственно x и y - компоненты волнового вектора; символ t означает операцию транспонирования в вектор - столбец.

$\hat{B} = \hat{B}\left[c_{ijkl}(z), e_{kij}(z), э_{ij}(z), k_x, k_y\right]$ -матрица коэффициентов

Элементы этой матрицы содержат в себе параметры среды в которой распространяется электроупругая волна.

Ромбическая система характеризуется взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка.

Ромбическая система класса 222 – система с тремя взаимно перпендикулярными осями, являющимися двукратными осями симметрии. Такая система должна отвечать двум моноклинным системам класса 2: одной с двукратной осью симметрии, параллельной оси Y, и другой – с двукратной осью симметрии, параллельной оси Z. Материальные постоянные должны определяться обеими моноклинными системами. Это условие приводит к уменьшению числа постоянных. Матрицы коэффициентов для ромбической системы класса 222 имеют вид [1]:

$$c_{ijkl}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix};e_{kij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix};э_{ij}=\begin{pmatrix} э_{11} & 0 & 0 \\ 0 & э_{22} & 0 \\ 0 & 0 & э_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Здесь мы имеем 9 независимых коэффициентов c_{ijkl}, 3 коэффициента e_{kij} и 3 коэффициента $э_{ij}$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\frac{dU_z}{dz}=\frac{1}{c_{33}}\sigma_{zz}+\left(\frac{ik_xc_{13}}{c_{33}}\right)U_x+\left(\frac{ik_yc_{13}}{c_{33}}\right)U_y$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz}=-\rho\omega^2U_z+ik_x\sigma_{xz}+ik_y\sigma_{yz}$$

$$\frac{dU_x}{dz}=\frac{1}{c_{55}}\sigma_{xz}+ik_xU_z+\frac{e_{25}}{c_{55}}E_y$$

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz}=\frac{ik_xc_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+(-\rho\omega^2+k_x^2c_{11}-\frac{k_x^2c_{13}^2}{c_{33}}+k_y^2c_{66}+\frac{k_y^2e_{36}^2}{э_{33}})U_x+(k_xk_yc_{12}-\frac{k_xk_yc_{13}c_{23}}{c_{33}}+k_xk_yc_{66}+$$
$$+\frac{k_xk_ye_{36}^2}{э_{33}})U_y-\frac{ik_y^2e_{36}}{\omega э_{33}}H_x+\frac{ik_xk_ye_{36}}{\omega э_{33}}H_y$$

$$\frac{dU_y}{dz}=\frac{1}{c_{44}}\sigma_{yz}+ik_yU_z+\frac{e_{14}}{c_{44}}E_x$$

$$\frac{d\sigma_{yz}}{dz}=\frac{ik_yc_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+(-\rho\omega^2+k_x^2c_{66}+k_y^2c_{22}-\frac{k_u^2c_{23}^2}{c_{33}}+\frac{k_x^2e_{36}^2}{э_{33}})U_y+(k_xk_yc_{66}+\frac{k_xk_ye_{36}^2}{э_{33}}+k_xk_yc_{12}-$$
$$-\frac{k_xk_yc_{13}c_{23}}{c_{33}})U_x+\frac{ik_x^2e_{36}^2}{\omega э_{33}}H_y-\frac{ik_xk_ye_{36}}{\omega э_{33}}H_x$$

$$\frac{dE_y}{dz}=\frac{ik_xk_y}{\omega э_{33}}H_y+(-\frac{ik_y^2}{\omega э_{33}}+i\omega\mu\mu_0)H_x+\frac{k_y^2e_{36}}{э_{33}}U_x+\frac{k_xk_ye_{36}}{э_{33}}U_y$$

$$\frac{dE_x}{dz}=-\frac{ik_xk_y}{\omega э_{33}}H_x+(\frac{ik_x^2}{\omega э_{33}}-i\omega\mu\mu_0)H_y+\frac{k_xk_ye_{36}}{э_{33}}U_x+\frac{k_x^2e_{36}}{э_{33}}U_y$$

$$\frac{dH_x}{dz}=\frac{i\omega e_{25}}{c_{55}}\sigma_{xz}+(i\omega\frac{e_{25}^2}{c_{55}}+i\omega э_{22}-\frac{ik_x^2}{\omega\mu\mu_0})E_y+\frac{ik_xk_y}{\omega\mu\mu_0}E_x$$

$$\frac{dH_y}{dz}=-\frac{i\omega e_{14}}{c_{44}}\sigma_{yz}+(-i\omega\frac{e_{14}^2}{c_{44}}-i\omega э_{11}+\frac{ik_y^2}{\omega\mu\mu_0})E_x-\frac{ik_xk_y}{\omega\mu\mu_0}E_y$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dz}=\hat{B}\vec{u};\vec{u}=(U_z,\sigma_{zz},U_x,\sigma_{xz},E_y,H_x,U_y,\sigma_{yz},H_y,E_x) \qquad (7)$$

где матрица $\hat{B}$ в одномерном случае имеет следующую структуру:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}=\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов следует, что в этом случае в пьезокристалле существует не один, а несколько типов волн, взаимодействие между которыми определяют коэффициенты $b_{35}=\frac{e_{25}}{c_{55}}$ и $b_{710}=\frac{e_{14}}{c_{44}}$. Эти коэффициенты отражают связь между пьезоэлектрическими модулями и упругими постоянными среды, в которой распространяются волны. Упругая продольная волна, описываемая коэффициентами b_{12} и b_{21} распространяется независимо от других типов волн. Коэффициент b_{35} определяет взаимодействие между упругой поперечной волной x-поляризации и электромагнитной TE- волной, а коэффициент b_{710} между упругой поперечной волной y- поляризации и электромагнитной TM- волной.

При распространении волн в координатной плоскости xz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz}=\hat{B}\vec{u};\vec{u}=(U_z,\sigma_{zz},U_x,\sigma_{xz},E_y,H_x,U_y,\sigma_{yz},H_y,E_x) \qquad (9)$$

где матрица $\hat{B}$ имеет структуру:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix}
0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & b_{89} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega}{i}b_{89} & 0 & b_{109} & 0
\end{pmatrix}\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}U_z\\ \sigma_{zz}\\ U_x\\ \sigma_{xz}\\ E_y\\ H_x\\ U_y\\ \sigma_{yz}\\ H_y\\ E_x\end{pmatrix} \qquad (10)$$

В этом случае коэффициенты $b_{24}=\dfrac{1}{c_{55}}$, $b_{35}=\dfrac{e_{14}}{c_{44}}$ и $b_{35}=\dfrac{e_{14}}{c_{44}}$ определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной x- поляризации и электромагнитной TE- волной, а $b_{710}=\dfrac{e_{14}}{c_{44}}, b_{89}=\dfrac{ik_x^2e_{36}^2}{\omega э_{33}}$ между упругой поперечной волной y- поляризации и электромагнитной TM- волной.

При распространении волн в координатной плоскости yz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\bar{u}}{dz}=\hat{B}\bar{u};\bar{u}=(U_z,\sigma_{zz},U_y,\sigma_{yz},H_y,E_x,U_x,\sigma_{xz},E_y,H_x) \qquad (11)$$

где матрица $\hat{B}$ имеет структуру:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix}
0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & b_{79} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega}{i}b_{810} & 0 & 0 & b_{910}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{79} & b_{109} & 0
\end{pmatrix}\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}U_z\\ \sigma_{zz}\\ U_y\\ \sigma_{yz}\\ H_y\\ E_x\\ U_x\\ \sigma_{xz}\\ E_y\\ H_x\end{pmatrix} \qquad (12)$$

В этом случае коэффициенты $b_{13} = \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}}$, $b_{24} = ik_y$ и $b_{36} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$ определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной y- поляризации и электромагнитной ТМ- волной, а коэффициенты $b_{79} = \frac{e_{25}}{c_{55}}, b_{810} = -\frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega э_{33}}$ между упругой поперечной волной x- поляризации и электромагнитной ТЕ- волной.

Коэффициенты определяющие взаимосвязь между различными типами волн обеспечивают постоянный переход энергии упругих волн в энергию электромагнитных волн и наоборот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.

2. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.

3. Тлеукенов С.К. Распространение волн в неоднородных пьезокристаллах гексагональной сингонии.//Сб. научн. трудов.КазНТУ, ч.II. Алматы,1994. С.62-65.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

С.Қ. ТЛЕУКЕНОВ, А.Б. БЕЛЯЛОВА

222 РОМБ СИНГОНИЯЛЫ ПЬЕЗОКРИСТАЛДАҒЫ ЭЛЕКТРОСЕРПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУ ТУРАЛЫ

S.K. TLEUKENOV, A.B. BELYLOVA

ABOUT PROPAGATION OF ELECTROELASTIC WAVES IN RHOMBIC SINGONIYA'S PIEZOCRYSTALS 222

Түйіндеме

Берілген мақалада және анаитикалық әдісі негізінде 222 классты ромбалық сингониялы пьезокристалдардағы серпімді электрлік толқындардың таралу заңдылықтары зерттелген. Максвел және қозғалыс теңдеулерінің толық жүйелері шешілген және анықталған, матрица коэффициенттернің құрылымы құрастырылған.

Resume

In the given article and on the basis of an analytical method of a matriciant are studied of regularity of distribution of elastic waves in piezocrystals rhombic singony of the class 222. Is obtained and the complete

set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.