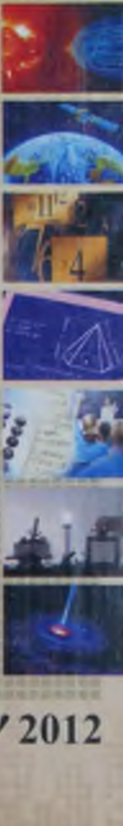
ISSN 1811-1807

ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік
университеті

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ



1-2′ 2012

ПМУ ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК ПГУ

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета имени С. Торайгырова

1997 ж. құрылған
Основан в 1997 г.

ПМУ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК ПГУ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

1-2 2012

Теруге 20.06.2012 ж. жіберілді. Басуға 28.06.2012 ж. қол қойылды.
Форматы 70х100 1/16. Кітап-журнал қағазы.
Көлемі шартты 7,9 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген А.Р. Тайлакова
Корректорлар: Б.Б. Әубәкірова, А. Елемесқызы, А.Р. Омарова
Тапсырыс № 1962

Сдано в набор 20.06.2012 г. Подписано в печать 28.06.2012 г.
Формат 70х100 1/16. Бумага книжно-журнальная.
Объем 7,9 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка А.Р. Тайлакова
Корректоры: Б.Б. Аубакирова, А. Елемескызы, А.Р. Омарова
Заказ № 1962

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
E-mail: publish@psu.kz
kereky@mail.ru

set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.

УДК 539.3:534.2

С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА, Н.А. ИСПУЛОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ТРИКЛИННОЙ СИНГОНИИ

В данной работе на основе метода матриканта [1] рассмотрено построение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и вытекающей из нее матрицы коэффициентов для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде триклинной сингонии. Построена структура матриканта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае. Данная среда обладает самой низкой симметрией и обладает 21-ю упругими и 9-ю термомеханическими параметрами.

1. Определяющие соотношения

Анализ распространения термоупругих волн в анизотропных средах основывается на совместном решении уравнений движения [2]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \tag{1}$$

или в покомпонентной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial Z} = \rho\,\frac{\partial^2 U_X}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{YY}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Z} = \rho\,\frac{\partial^2 U_Y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{ZZ}}{\partial Z} = \rho\,\frac{\partial^2 U_Z}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1$'$}$$

уравнения теплопроводности Фурье

$$\lambda_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \tag{2}$$

уравнения притока тепла

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega\beta_{ij}\varepsilon_{ij} - i\omega\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta \tag{3}$$

где- σ_{ij} -тензор напряжения, ρ -плотность среды, λ_{ij} -тензор теплопроводности, q_i - вектор притока тепла, ω - круговая частота, β_{ij} -термомеханические параметры, ε_{ij} - тензор малых деформаций Коши, c_ε -теплоемкость при постоянной деформации, $\theta = T - T_0$ - приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния T_0, $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| << 1$ для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta \qquad (4)$$

Для триклинной сингонии (оси произвольны) число упругих постоянных равно 21, а термомеханических параметров – 9. В матричном виде соотношение Дюгамеля - Неймана (4) для триклинной сингонии имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta \qquad (4)'$$

где c_{ijkl} - упругие параметры анизотропной среды триклинной сингонии.

2. Система дифференциальных уравнений 1 порядка

Уравнения (1)-(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[U_i(x,y,z,t);\ \sigma_{ij}(x,y,z,t);\theta;\ q_z\right] = \left[U_i(z),\sigma_{ij}(z),\theta;\ q_z\right]e^{\text{[illegible]}} \qquad (5)$$

система уравнений (1)-(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \qquad (6)$$

Здесь $\vec{W}(x,y,z,t)=\left[u_z(z),\sigma_{zz},u_x(z),\sigma_{xz},u_y(z),\sigma_{yz},\theta,q_z\right]^t \exp(i\omega t-imx-iny)$ - вектор-столбец. Символ t означает операцию транспонирования вектора - строки в вектор – столбец.

$B=B\left[c_{ijkl}(z)\ \beta_j\ (z)\ \theta,\omega,m,n\right]$ – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны, m,n - компоненты волнового вектора $\bar{k}$

Матрица коэффициентов в объемном случае для триклинной сингонии имеет вид:

$$B=\begin{bmatrix}
0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & 0\\
b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0\\
b_{24} & b_{14} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & 0\\
0 & b_{13} & b_{43} & b_{33} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & 0\\
b_{26} & b_{16} & b_{46} & b_{36} & b_{55} & b_{56} & b_{57} & 0\\
0 & b_{15} & b_{45} & b_{35} & b_{65} & b_{55} & b_{67} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78}\\
0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{37} & \omega b_{47} & -\omega b_{57} & -\omega b_{67} & b_{87} & 0
\end{bmatrix}$$

Из структуры матрицы коэффициентов следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловые волны взаимосвязаны. Связь тепловой волны с упругими волнами характеризуется коэффициентом b_{17}, который равен

$$b_{17}=\frac{(c_{45}^2-c_{44}c_{55})(\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})}{a}$$

Взаимосвязь упругих волн различной поляризации определяется наличием и расположением в матрице коэффициентов - b_{37}, b_{47}, b_{57}, соответственно равные:

$$b_{37}=\frac{(c_{35}c_{44}-c_{34}c_{45})(\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})}{a};$$

$$b_{47}=-i\left(\frac{c_{34}^2\beta_{13}+c_{33}(c_{45}\beta_{23}-c_{44}\beta_{13})+c_{35}c_{44}\beta_{33}-c_{34}(c_{35}\beta_{23}+c_{45}\beta_{33})}{a}\right);$$

$$b_{57}=-\frac{(c_{35}c_{45}-c_{34}c_{55})(\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})}{a};$$

где $a=c_{35}^2c_{44}-2c_{34}c_{35}c_{45}+c_{34}^2c_{55}+c_{33}\left(c_{45}^2-c_{44}c_{55}\right)$

Малое количество нулей в матрице коэффициентов говорит о низкой симметрии анизотропной среды триклинной сингонии.

3. Структура матриканта

Построение структуры матриканта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда [3]:

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \ldots \tag{7}$$

И аналогичном представлении обратного матриканта T^{-1}

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2) B(z_1) dz_1 dz_2 - \ldots \tag{8}$$

Матричные ряды (10), (11) представимы в виде сумм матриц

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, T^{-1} = \sum T_{(n)}^{-1} \tag{9}$$

Структура матриканта в случае распространения термоупругих волн в кристаллах триклинной сингонии в объемном случае определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & t_{82} & -t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & -t_{81} & t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & -t_{84} & t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & t_{83} & -t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & -t_{86} & t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & t_{85} & -t_{75} \\ t_{28} & -t_{18} & -t_{48} & t_{38} & -t_{68} & t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ -t_{27} & t_{17} & t_{47} & -t_{37} & t_{67} & -t_{57} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Структура матриканта есть зависимость между элементами прямого и обратного матриканта в форме (8) и все следствия, вытекающие из него, а также зависимость между элементами T и T-1, следующие из тождества [4]:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \tag{11}$$

Где Е-единичная матрица

Таким образом, в работе построена система дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая распространение термоупругих волн в анизотропных средах триклинной сингонии, а знание структуры матрицы коэффициентов в этой системе позволяет определить связь между волнами различной поляризации, в данном случае определить связь упругих и тепловых волн, т.е. наличие термоупругого эффекта. Построена структура матрицанта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Тлеукенов Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.

2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986, 556 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988, 552 с.

4. Тлеукенов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат.,1991, N 5, С. 87-91.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА, Н.А. ИСПУЛОВ

АНИЗОТРОПТЫ ОРТАНЫҢ ТРИКЛИНДЫ СИНГНИЯДАҒЫ ТЕРМОСЕПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ

S.K. TLEUKENOV, A.K.SEYTKHANOVA, N.A. ISPULOV

ABOUT DISTRIBUTION OF THERMOELASTIC WAVES IN TRIKLINNA SINGONIYA'S NON-ISOTROPIC MEDIUM

Түйіндеме

Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылуөткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі. Берілген мақалада, матрицант әдісінің негізінде, анизотропты ортаның триклинды сингониядағы термосерпімді толқындардың таралуын сипаттайтын 1-ші ретті дифференциалдық теңдеулердің құрылуы қарастырылған.

Resume

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of

the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied. In given article on the basis of a method matrizant construction of system of the differential equations of 1st order and a matrix of factors following from it for the thermo elastic waves extending in anisotropic triclinic system environment is considered.