ISSN 1680-9165

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ПАВЛОДАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. С. ТОРАЙГЫРОВА

4'2002

НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА

ҚАЗАҚСТАН ҒЫЛЫМЫ МЕН ТЕХНИКАСЫ

10-летию

НЕЗАВИСИМОСТИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

посвящается

№4 2002

ҚАЗАҚСТАН ҒЫЛЫМЫ МЕН ТЕХНИКАСЫ

С. ТОРАЙҒЫРОВ АТЫНДАҒЫ ПАВЛОДАР МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

МАЗМҰНЫ

Жаратылыстану ғылымдары

Адрес редакции:
637034, г. Павлодар,
ул. Ломова, 64.
Тел.: (3182) 45-11-43
(3182) 45-38-60
Факс: (3182) 45-11-23
E-mail: publish@psu.kz
nauka@psu.kz

УДК 517.587

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА-ЭРМИТА

М.Н. Ильясов

Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова

Мақалада $(-\infty,+\infty)$ *интервалында* $h(x)=e^{-x^2}$ *зілдеме функция арқылы биортогоналды* $R_n(x;k)$ *және* $T_n(x^k;k)$ *копмүшелілердің алгебралық және конструктивтік қасиеттері қарастырылған.*

В статье рассматриваются некоторые алгебраические и конструктивные свойства полиномов $R_n(x;k)$ *и* $T_n(x^k;k)$, *биортогональных на интервале* $(-\infty,+\infty)$ *с весовой функцией* $h(x)=e^{-x^2}$.

In the article algebraice constructive attributes of biorthogonal polynomials $R_n(x;k)$ *and* $T_n(x^k;k)$ *over the interval* $(-\infty,+\infty)$ *and with the weight function* $h(x)=e^{-x^2}$ *is researched.*

В работе [1] (гл. I, § 4) изучены многочлены $R_n(x;k)$ и $T_n(x^k;k)$, биортогональные на интервале $(-\infty,+\infty)$ с весовой функцией $h(x)=e^{-x^2}$.

В частности, для многочленов $R_n(x;k)$ найдены производящие функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n=(1+t)^{-\frac{1}{2k}}\exp\left\{x^2[1-(1+t)^{-\frac{1}{k}}]\right\}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n+1}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n=2x(1+t)^{-\frac{k+2}{2k}}\exp\left\{x^2[1-(1+t)^{-\frac{1}{k}}]\right\}, \tag{2}$$

В данной статье доказаны новые свойства этих многочленов.

Для $R_n(x;k)$ справедливы рекуррентные соотношения:

$$R_{2n+1}(x;k)=2x\sum_{m=0}^{n}(-4k)^m\binom{n}{m}\left(\frac{1+k}{2k}\right)_m R_{2n-2m}(x;k), \qquad (3)$$

$$R_{2n}(x;k)=\frac{1}{2x}\sum_{m=0}^{n}(-4k)^m\binom{n}{m}\left(-\frac{1+k}{2k}\right)_m R_{2n-2m+1}(x;k), \qquad (4)$$

где $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$, $(\alpha)_n$ - символ Похгаммера, то есть $(\alpha)_0=1$,

$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$.

Для доказательства (4) преобразуем правую часть (1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n=(1+t)^{-\frac{1}{2k}}\exp\left\{x^2[1-(1+t)^{-\frac{1}{k}}]\right\}=$$

$$=(1+t)^{\frac{k+1}{2k}}\left\{(1+t)^{-\frac{k+2}{2k}}\exp\left[x^2(1-(1+t)^{-\frac{1}{k}})\right]\right\}$$

Заменяя выражения в фигурных скобках через левую часть (2) и используя известные соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)n}{n!}t^n=(1-t)^{-\lambda}, \qquad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A(n,m)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A(n-m,m), \qquad (6)$$

получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n=(1+t)^{\frac{k+1}{2k}}\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n+1}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{k+1}{2k}\right)_m}{m!}(-t)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n+1}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}(-4k)^m\binom{n}{m}\left(-\frac{k+1}{2k}\right)_m R_{2n-2m+1}(x;k)\left(\frac{t}{4k}\right)^n$$

Из этого равенства, сравнивая коэффициенты в обеих частях при одинаковых степенях t, получим соотношение (4). В частности, при $k=1$ формула (4) принимает вид

$$R_{2n}(x;1) = \frac{1}{2x}\left[R_{2n+1}(x;1) + 4nR_{2n-1}(x;1)\right]$$

или

$$R_{2n+1}(x;1) - 2xR_{2n}(x;1) + 4n\,R_{2n-1}(x;1) = 0\,,$$

известная рекуррентная формула для ортогональных многочленов Чебышева-Эрмита.

Рекуррентная формула (3) доказывается аналогично. Докажем существованис производящих функций для $T_n(x^k;k)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)n\,T_{2n+1}(x^k;k)t^n}{n!2^{(2n+1)k}\,\Gamma\left(kn+\dfrac{k+2}{2}\right)} = x^k(1+t)^{-\lambda}\,\mathrm{E}^{\lambda}_{k,\frac{k+2}{2}}\left(\frac{x^{2k}t}{1+t}\right), \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)n\,T_{2n}(x^k;k)t^n}{n!\,2^{2nk}\,\Gamma\left(kn+\dfrac{1}{2}\right)} = (1+t)^{-\lambda}\,\mathrm{E}^{\lambda}_{k,\frac{1}{2}}\left(\frac{x^{2k}t}{1+t}\right), \tag{8}$$

где $\mathrm{E}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(7) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\gamma)_n\,z^n}{n!\,\Gamma(\alpha n+\beta)}$ - функция Райта-Фокса.

Докажем соотношение (7), подставляя вместо $T_{2n+1}(x^k;k)$ его значения из явной формулы этого многочлена

$$T_{2n+1}(x^k;k) = (-1)^n 2^{(2n+1)k}\left(\frac{k+2}{2}\right)_{kn}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{x^{(2m+1)k}}{\left(\dfrac{k+2}{2}\right)_{km}}\,,\ ([1],\ 4.4),$$

а также учитывая (5), (6) и соотношения

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\,,\ (\lambda)_{n+m} = (\lambda)_m\cdot(\lambda+m)_n\,.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n T_{2n+1}(x^k;k)t^n}{n!\,2^{(2n+1)k}\Gamma\left(kn+\frac{k+2}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n t^n(-1)^n 2^{(2n+1)k}}{n!\,2^{(2n+1)k}\Gamma\left(kn+\frac{k+2}{2}\right)}\left(\frac{k+2}{2}\right)_{kn}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{x^{(2m+1)k}}{\left(\frac{k+2}{2}\right)_{km}}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{n+m}t^{n+m}(-1)^{n+m}}{(n+m)!\,\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{n+m}{m}\frac{x^{(2m+1)k}}{\left(\frac{k+2}{2}\right)_{km}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m t^m x^{(2m+1)k}}{m!\,\Gamma\left(km+\frac{k+2}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n(\lambda+m)_n}{n!}=x^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m(x^{2k}t)^m}{m!\,\Gamma\left(km+\frac{k+2}{2}\right)}(1+t)^{-\lambda-m}=$$

$$=x^k(1+t)^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m}{m!\,\Gamma\left(km+\frac{k+2}{2}\right)}\left(\frac{x^{2k}t}{1+t}\right)^m=x^k(1+t)^{-\lambda}E^{\lambda}_{k,\frac{k+2}{2}}\left(\frac{x^{2k}t}{1+t}\right)$$

Формула (8) доказывается аналогично.

Теперь для этих многочленов выведем формулы – аналог формулы Родрига.

Из (7) по формуле Тейлора получим

$$\frac{(\lambda)_n T_{2n+1}(x^k;k)}{n!\,2^{(2n+1)k}\Gamma\left(kn+\frac{k+2}{2}\right)}=\frac{x^k}{2\pi i}\int_c(1+t)^{-\lambda}E^{\lambda}_{k,\frac{k+2}{2}}\left(\frac{tx^{2k}}{1+t}\right)t^{-n-1}\,dt\,.$$

где c –контур, содержащий точку $t=0$ и $|t|<1$.

Выполним замену переменной под интегралом

$$1+t=\frac{x^{2k}}{U},\quad t=\frac{x^{2k}-U}{U},\quad dt=-\frac{x^{2k}dU}{U^2},\quad \frac{t}{1+t}=\frac{x^{2k}-U}{x^{2k}}.$$

Тогда

$$T_{2n+1}(x^k;k)=\frac{n!\,2^{(2n+1)k}\Gamma\left(kn+\frac{k+2}{2}\right)x^k}{(\lambda)_n\cdot 2\pi i}\int_c\left(\frac{x^{2k}}{U}\right)^{-\lambda}E^{\lambda}_{k,\frac{k+2}{2}}(x^{2k}-U)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{x^{2k}-U}{U}\right)^{-n-1}\left(-\frac{x^{2k}dU}{U^2}\right)=\frac{n!\,2^{(2n+1)k}\Gamma\left(kn+\frac{k+2}{2}\right)}{(-1)^n(\lambda)_n\cdot 2\pi i}x^{3k-2k\lambda}\int_c\frac{U^{n+\lambda-1}E^{\lambda}_{k,\frac{k+2}{2}}(x^{2k}-U)\,dU}{(U-x^{2k})^{n+1}}$$

где c' - окружность $\left|U - x^{2k}\right| = \rho$.

Из последнего соотношения по теореме Коши получим

$$T_{2n+1}(x^k;k) = \frac{2^{(2n+1)k}\,\Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)}{(-1)^n(\lambda)n} x^{3k-2k\lambda} \frac{\partial^n}{\partial U^n}\left[U^{n+\lambda-1} \mathrm{E}^{\lambda}_{k,\frac{k+2}{2}}\left(x^{2k} - U\right)\right]_{U=x^{2k}},$$

аналогично получим

$$T_{2n}(x^k;k) = \frac{2^{2nk}\,\Gamma\left(kn + \frac{1}{2}\right)}{(-1)^n(\lambda)n} x^{2k-2k\lambda} \frac{\partial^n}{\partial U^n}\left[U^{n+\lambda-1} \mathrm{E}^{\lambda}_{k,\frac{1}{2}}\left(x^{2k} - U\right)\right]_{U=x^{2k}}.$$

В заключение предлагаю без доказательства представления этих многочленов через $M_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{m+n}\,dx$ - степенные моменты весовой функции $h(x) = e^{-x^2}$.

$$R_n(x;k) = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1}\cdot G_n}} \begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0,n-1} & 1 \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1,n-1} & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n0} & M_{n1} & \dots & M_{n,n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

$$T_n(x^k;k) = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1}\cdot G_n}} \begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0n} \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n-1,0} & M_{n-1,1} & \dots & M_{n-1,n} \\ 1 & x^k & \dots & x^{kn} \end{vmatrix},$$

где $G_{-1} = 1$, $G_n = \begin{vmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0n} \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n0} & M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix}$ - определитель Грама.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильясов М.Н. Биортогональные полиномы одной и двух переменных: Диссертация кандидата физико-математических наук. – Алматы, 1993. – 102 с.