

# НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ПАВЛОДАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.С.ТОРАЙГЫРОВА



4'2002

## НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА



КАЗАХСТАН  
ҒЫЛЫМЫ МЕН ТЕХНИКАСЫ

*10-летию*

**НЕЗАВИСИМОСТИ  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
посвящается**



## Жаратылыстану ғылымдары

*М.Ж. Толымбеков*

Марганецті кен базасы мен ХХІ ғасырдағы Қазақстан Республикасының ферромарганецті жергілікті шикізат өндіру болашақтары ..... 7

*В.В. Рыдин*

Жүйе тепе-теңсіздігінің сандық өлшемдері және процесс өту барысындағы олардың өзгеруі ..... 12

*А.Қ. Алпысов*

10-сынып геометриясын векторлық – координаталық негізде оқыту әдістемесі ..... 22

*Т. Сұлейменов*

Д.И. Менделеевтің периодтық жүйесі және балқымаларындағы ультрадыбыстың таралуының өзгерісі арасындағы заңдылықтар ..... 33

*Ғ.М. Мұқанов*

Жиын қуаты және трансфиниттер теориясының логикалық құралымы ..... 41

*Ж.Қ. Шоманова, Р.Ж. Мұқанова,  
Қ.Т. Сапаров, Р.Қ. Сеитова*

Павлодар қаласының өндіріс аймағының топырақ құрамына ықпалы ..... 50

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Нухулы А., д.х.н., проф. (*главный редактор*)  
 Утегулов Б.Б., д.т.н., проф. (*зам. гл. редактора*)  
 Ельмуратова А.Ф., к.т.н., доц. (*отв. секретарь*)  
 Члены редакционной коллегии:  
 Бойко Ф.К., д.т.н., проф.  
 Газалиев А.М., д.х.н., проф., член-корр. НАН РК  
 Гамарник Г.Н., д.т.н., проф.  
 Глазырин А.И., д.т.н., проф.  
 Даукеев Г.Ж., к.т.н., проф.  
 Ергожин Е.Е., д.х.н., проф., академик НАН РК  
 Кислов А.П., к.т.н., доц.  
 Клецель М.Я., д.т.н., проф.  
 Кудерин М.К., к.т.н., доц.  
 Мансуров З.А., д.х.н., проф.  
 Мурзагулова К.Б., д.х.н., проф.  
 Пивень Г.Г., д.т.н., проф.  
 Сагинов А.С., д.т.н., проф., академик НАН РК  
 Сулеев Д.К., к.т.н., проф.  
 Сейтахметова Г.Н. (*тех. редактор*)

Адрес редакции:

637034, г. Павлодар,  
ул. Ломова, 64.

Тел.: (3182) 45-11-43

(3182) 45-38-60

Факс: (3182) 45-11-23

E-mail: publish@psu.kz  
nauka@psu.kz

УДК 517.587

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА-ЭРМИТА

М.Н. Ильясов

Павлодарский государственный университет  
им. С.Торайгырова

Мақалада  $(-\infty, +\infty)$  интервалында  $h(x) = e^{-x^2}$  зілдеме функция арқылы биортогоналды  $R_n(x; k)$  және  $T_n(x^k; k)$  көпмүшелердің алгебралық және конструктивтік қасиеттері қарастырылған.

В статье рассматриваются некоторые алгебраические и конструктивные свойства полиномов  $R_n(x, k)$  и  $T_n(x^k, k)$ , биортогональных на интервале  $(-\infty, +\infty)$  с весовой функцией  $h(x) = e^{-x^2}$ .

In the article algebraic constructive attributes of biorthogonal polynomials  $R_n(x, k)$  and  $T_n(x^k, k)$  over the interval  $(-\infty, +\infty)$  and with the weight function  $h(x) = e^{-x^2}$  is researched.

В работе [1] (гл. I, § 4) изучены многочлены  $R_n(x; k)$  и  $T_n(x^k; k)$ , биортогональные на интервале  $(-\infty, +\infty)$  с весовой функцией  $h(x) = e^{-x^2}$ .

В частности, для многочленов  $R_n(x; k)$  найдены производящие функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R_{2n}(x; k) \left(\frac{t}{4k}\right)^n = (1+t)^{-\frac{1}{2k}} \exp\left\{x^2\left[1 - (1+t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\}, \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R_{2n+1}(x; k) \left(\frac{t}{4k}\right)^n = 2x(1+t)^{-\frac{1}{2k}} \exp\left\{x^2\left[1 - (1+t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\}, \quad (2)$$

В данной статье доказаны новые свойства этих многочленов.

Для  $R_n(x; k)$  справедливы рекуррентные соотношения:

$$R_{2n+1}(x; k) = 2x \sum_{m=0}^n (-4k)^m \binom{n}{m} \left( \frac{1+k}{2k} \right)_m R_{2n-2m}(x; k), \quad (3)$$

$$R_{2n}(x; k) = \frac{1}{2x} \sum_{m=0}^n (-4k)^m \binom{n}{m} \left( -\frac{1+k}{2k} \right)_m R_{2n-2m+1}(x; k), \quad (4)$$

где  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ;  $(\alpha)_n$  - символ Похгаммера, то есть  $(\alpha)_0 = 1$ ,

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1).$$

Для доказательства (4) преобразуем правую часть (1).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R_{2n}(x; k) \left( \frac{t}{4k} \right)^n &= (1+t)^{\frac{1}{2k}} \exp \left\{ x^2 \left[ 1 - (1+t)^{\frac{1}{k}} \right] \right\} = \\ &= (1+t)^{\frac{k+1}{2k}} \left\{ (1+t)^{-\frac{k+2}{2k}} \exp \left[ x^2 \left( 1 - (1+t)^{\frac{1}{k}} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Заменяя выражения в фигурных скобках через левую часть (2) и используя известные соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} t^n = (1-t)^{-\lambda}, \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A(n, m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A(n-m, m), \quad (6)$$

получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R_{2n}(x; k) \left( \frac{t}{4k} \right)^n &= (1+t)^{\frac{k+1}{2k}} \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R_{2n+1}(x; k) \left( \frac{t}{4k} \right)^n = \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{k+1}{2k} \right)_n}{n!} (-t)^n \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} R_{2m+1}(x; k) \left( \frac{t}{4k} \right)^m = \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n (-4k)^m \binom{n}{m} \left( -\frac{k+1}{2k} \right)_m R_{2n-2m+1}(x; k) \left( \frac{t}{4k} \right)^n \end{aligned}$$

Из этого равенства, сравнивая коэффициенты в обеих частях при одинаковых степенях  $t$ , получим соотношение (4). В частности, при  $k=1$  формула (4) принимает вид

$$R_{2n}(x;1) = \frac{1}{2x} [R_{2n+1}(x;1) + 4nR_{2n-1}(x;1)]$$

или

$$R_{2n+1}(x;1) - 2xR_{2n}(x;1) + 4nR_{2n-1}(x;1) = 0,$$

известная рекуррентная формула для ортогональных многочленов Чебышева-Эрмита.

Рекуррентная формула (3) доказывается аналогично. Докажем существование производящих функций для  $T_n(x^k; k)$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)n T_{2n+1}(x^k; k)t^n}{n! 2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)} = x^k (1+t)^{-\lambda} E_{k, \frac{k+2}{2}}^{\lambda} \left( \frac{x^{2k}t}{1+t} \right), \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)n T_{2n}(x^k; k)t^n}{n! 2^{2nk} \Gamma\left(kn + \frac{1}{2}\right)} = (1+t)^{-\lambda} E_{k, \frac{1}{2}}^{\lambda} \left( \frac{x^{2k}t}{1+t} \right), \quad (8)$$

где  $E_{\alpha, \beta}^{\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}$  - функция Райта-Фокса.

Докажем соотношение (7), подставляя вместо  $T_{2n+1}(x^k; k)$  его значения из явной формулы этого многочлена

$$T_{2n+1}(x^k; k) = (-1)^n 2^{(2n+1)k} \left( \frac{k+2}{2} \right)_{kn} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{x^{(2m+1)k}}{\left( \frac{k+2}{2} \right)_{km}}, \quad ([1], 4.4),$$

а также учитывая (5), (6) и соотношения

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\lambda)_{n+m} = (\lambda)_m \cdot (\lambda+m)_n.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n T_{2n+1}(x^k; k) t^n}{n! 2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n t^n (-1)^n 2^{(2n+1)k}}{n! 2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)} \binom{k+2}{2}_{kn} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{x^{(2m+1)k}}{\binom{k+2}{2}_{km}} = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m t^{m+1} (-1)^{m+1}}{(m+1)! \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n+m}{m} \frac{x^{(2m+1)k}}{\binom{k+2}{2}_{km}} &= \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m t^{m+1} x^{(2m+1)k}}{m! \Gamma\left(km + \frac{k+2}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda+m)n}{n!} &= x^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m (x^{2k} t)^m}{m! \Gamma\left(km + \frac{k+2}{2}\right)} (1+t)^{-\lambda-m} = \\ = x^k (1+t)^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m}{m! \Gamma\left(km + \frac{k+2}{2}\right)} \left(\frac{x^{2k} t}{1+t}\right)^m &= x^k (1+t)^{-\lambda} E_{k, \frac{k+2}{2}}^{\lambda} \left(\frac{x^{2k} t}{1+t}\right) \end{aligned}$$

Формула (8) доказывается аналогично.

Теперь для этих многочленов выведем формулы – аналог формулы Родрига.

Из (7) по формуле Тейлора получим

$$\frac{(\lambda)_n T_{2n+1}(x^k; k)}{n! 2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)} = \frac{x^k}{2\pi i} \int_c (1+t)^{-\lambda} E_{k, \frac{k+2}{2}}^{\lambda} \left(\frac{tx^{2k}}{1+t}\right) t^{-n-1} dt$$

где  $c$  – контур, содержащий точку  $t = 0$  и  $|t| < 1$ .

Выполним замену переменной под интегралом

$$1+t = \frac{x^{2k}}{U}, \quad t = \frac{x^{2k} - U}{U}, \quad dt = -\frac{x^{2k} dU}{U^2}, \quad \frac{t}{1+t} = \frac{x^{2k} - U}{x^{2k}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(x^k; k) &= \frac{n! 2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right) x^k}{(\lambda)_n \cdot 2\pi i} \int_c \left(\frac{x^{2k}}{U}\right)^{-\lambda} E_{k, \frac{k+2}{2}}^{\lambda}(x^{2k} - U) \cdot \\ \left(\frac{x^{2k} - U}{U}\right)^{-n-1} \left(-\frac{x^{2k} dU}{U^2}\right) &= \frac{n! 2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)}{(-1)^n (\lambda)_n \cdot 2\pi i} x^{3k-2k\lambda} \int_c \frac{U^{n+\lambda-1} E_{k, \frac{k+2}{2}}^{\lambda}(x^{2k} - U) dU}{(U - x^{2k})^{n+1}} \end{aligned}$$

где  $c'$  - окружность  $|U - x^{2k}| = \rho$ .

Из последнего соотношения по теореме Коши получим

$$T_{2n+1}(x^k; k) = \frac{2^{(2n+1)k} \Gamma\left(kn + \frac{k+2}{2}\right)}{(-1)^n (\lambda)n} x^{2k-2k\lambda} \frac{\partial^n}{\partial U^n} \left[ U^{n+k-1} E_{k, \frac{k+2}{2}}^\lambda (x^{2k} - U) \right]_{U=x^{2k}}$$

аналогично получим

$$T_{2n}(x^k; k) = \frac{2^{2nk} \Gamma\left(kn + \frac{1}{2}\right)}{(-1)^n (\lambda)n} x^{2k-2k\lambda} \frac{\partial^n}{\partial U^n} \left[ U^{n+k-1} E_{k, \frac{1}{2}}^\lambda (x^{2k} - U) \right]_{U=x^{2k}}$$

В заключение предлагаю без доказательства представления этих многочленов через  $M_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^m dx$  - степенные моменты весовой функции  $h(x) = e^{-x^2}$ .

$$R_n(x^k; k) = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1} \cdot G_n}} \begin{vmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,n-1} & 1 \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \dots & M_{1,n-1} & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n,0} & M_{n,1} & \dots & M_{n,n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

$$T_n(x^k; k) = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1} \cdot G_n}} \begin{vmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,n} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n-1,0} & M_{n-1,1} & \dots & M_{n-1,n} \\ 1 & x^k & \dots & x^{kn} \end{vmatrix}.$$

где  $G_{-1} = 1$ ,  $G_n = \begin{vmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,n} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n,0} & M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix}$  - определитель Грама.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильясов М.Н. Биортогональные полиномы одной и двух переменных: Диссертация кандидата физико-математических наук. - Алматы, 1993. - 102 с.