ISSN 1811-1807

# ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

С. ТОРАЙҒЫРОВ АТЫНДАҒЫ ПАВЛОДАР МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

1 '2007

# ПМУ хабаршысы
# Вестник ПГУ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ

УДК 531.3

# НЬЮТОН – ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫНЫҢ ҚОЛДАНУ ШЕГІ

***Ж. Құлыбаева, Ғ.М. Мұқанов***
***С. Торайеыров атындааы Павлодар мемлекеттік университеті***

*Авторы в своей статье рассматривают пределы использования производной формулы Ньютона-Лейбница.*

*Авторлар өз мақаласында Ньютон-Лейбниц формуласының туындысы, оның қолданылу шегі жайында қарастырады.*

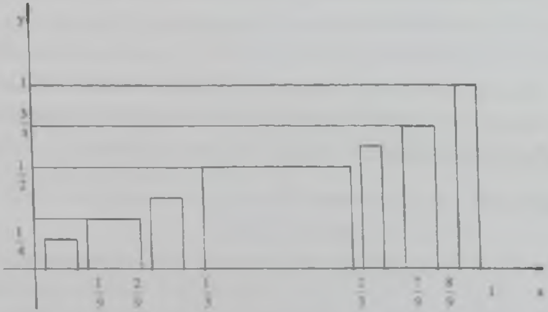
*The article considers the limits of Newton-Leibniz formula application.*

Бір қалыпты үзіліссіз функциялар класында Ньютон – Лейбниц формуласының орындалмайтын мысалын келтірілген Кантор болатын. Бұл мысал Кантор сатысы деп аталатын мына функция үшін қарастырылған:

$[0;1]$ кесіндісінде Кантордың $P_n$ және $G_n$ жиындарын құрайық. Ұзындыктары $\frac{1}{3^n}$-не тең $G_n$ – нің құраушы аралыктарын солдан оңға қарай $k = 1,2,...2^{n-1}$ деп нөмірлеп алып, осы аралықтарда $f(x)$ функциясын

$$f(x) = \frac{2k-1}{2^n}, \qquad \alpha_k \le x \le \beta_k, \quad \beta_k - \alpha_k = \frac{1}{3^n}$$

деп анықтайық. ( 1-ші сурет).




**1- ші сурет**

Демек,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{егер } \frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}\\ \frac{1}{4}, \text{егер } \frac{1}{9}\le x\le\frac{2}{9}\\ \frac{3}{4}, \text{егер } \frac{7}{9}\le x\le\frac{8}{9}\end{cases}$$

Енді функцияны $P_n$ жиынында анықтайық. $x_n \in P_n$ және $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ осы нүктеге жинақталатын $G_n$ мен оны құрушы интервалдардың ұштарынан тұратын жиынның өспелі нүктелер тізбегі, ал, $\{x'_n\}$ осы жиынның $x_0$ -- ге жинақталатын кемімелі нүктелер жиыны болсын. Әлбетте,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

теңдігі орындалады. Осы шекті $f(x)$ –тің $x_0$ нүктесіндегі мәні деп алайық. Демек,

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

Кантор теоремасы бойынша, «Кантор сатысы» $[0;1]$ кесіндісінде бірқалыпты үзіліссіз және осы кесіндісінің барлық жерінде дерлік дифференциалданады. $f(x)$ – тің абсолют үзіліссіз болмайтын көрсетейік. $mP_0=0$ екені белгілі. Сондықтан бұл жиынды $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ ( $\delta$ –кез келген аз шама) теңсіздігін қанағаттандыратын $(a_k,b_k)$, $k=1,2,\ldots n$, аралықтар жүйесімен жабуға болады және

$$\sum_{k=1}^{n}\left| f(b_k)-f(a_k) \right|=1$$

Демек, бұл функция абсолют үзіліссіз емес.

Әлбетте, $f'(x)$ $[0;1]$ кесіндісінің барлық жерінде дерлік нөлге тең. Сондықтан, $\int_0^1 f'(x)dx = 0$. Демек,

$$0 = \int_0^1 f'(x)dx < f(x)\Big|_0^1 \neq f(1) - f(0) = 1$$

Ягни, [a, b] кесіндісінің барлық жерінде дерлік дифферециалданатын бірқалыпты үзіліссіз функцияны оның туындысы арқылы Лебег интегралы анықтай алмайды. Басқаша айтсақ, егер $F(x)$ бірқалыпты үзіліссіз функция болып, $F'(x) = f(x)$ теңдігі осы кесіндінің барлық жерінде дерлік орындалса, онда

$$\int_a^x f(t)dt \leq F(x) - F(a)$$

теңсіздігі орындалады.Теңдік міндетті емес.

Осымен байланысты, Ньютон – Лейбниц формуласы орындалатын функциялар класын анықтау мәселесі туындайды. Басқаша айтсақ, қандай функциялар класында айнымалы жоғарғы шегінен тәуелді интеграл, осы интеграл астындағы функцияның бастапқы бейнесі болады?

Бұл сауалға төмендегі теоремалар жауап береді.

Теорема 1. Қосындыланатын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы болатын

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

функциясы абсолют үзіліссіз.

Теорема 2. (Лебег). [a,b] кесіндісінде анықталған абсолют үзіліссіз $F(x)$ функциясының $f(x) = F'(x)$ туындысы осы кесіндіде қосындыланады және [a,b] кесіндісінің әрбір $x$ $(a \leq x \leq b)$ нүктесінде

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

теңдігі орындалады.

Сонымен, Ньютон – Лейбниц формуласы туындысы абсолют үзіліссіз болатын $F(x)$ функциясы үшін орындалады.